

## Diagonalisation par blocs de matrices compagnon

On désigne pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $\mathbb{E}_n$  l'espace vectoriel des matrices colonne d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $0_n$  la matrice colonne d'ordre  $n$  dont tous les termes sont nuls.

On considère une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et on désigne par  $m_A(X)$  son polynôme minimal qu'on met sous forme d'un produit de puissances de polynômes  $P_i(X)$  premiers entre eux et irréductibles :

$$m_A(X) = \prod_{i=1}^q P_i(X)^{n_i}$$

Ainsi  $P_i(X)$  est un polynôme de degré 1 de la forme  $X - \lambda_i$ .

On désigne dans la suite, pour une matrice carrée  $B$  d'ordre  $n$ , par  $\text{Ker}(B)$  le noyau de l'endomorphisme de  $\mathbb{E}_n$  ayant pour matrice  $B$  dans la base canonique de  $\mathbb{E}_n$  autrement dit :

$$\text{Ker}(B) = \{X \in \mathbb{E}_n : B X = 0_n\}$$

1) Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}_n = \text{Ker}(P_1(A)^{n_1}) \oplus \text{Ker}(P_2(A)^{n_2}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_q(A)^{n_q})$$

On pourra utiliser le théorème de Bezout sur les polynômes premiers entre eux dans leur ensemble

- 2) Montrer que chaque sous espace  $\text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$  est stable par  $A$
- 3) Justifier que :  $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket : \exists V_i \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i}) : P_i(A)^{n_i-1} V_i \neq 0_n$
- 4) Pour  $Y \in \mathbb{E}_n$ , on définit le sous-ensemble de  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes annulateurs de  $Y$  c'est-à-dire :  $I_Y = \{P(X) \in \mathbb{K}[X] : P(A)Y = 0_n\}$ . Montrer qu'il existe un polynôme à coefficient dominant égal à 1 et noté  $m_{A,Y}(X)$  tel que  $I_Y$  soit l'ensemble des polynômes multiples de ce polynôme, c'est-à-dire :  $I_Y = \{P(X) m_{A,Y}(X) : P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ .
- 5) Pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $V_i \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$  tel que  $P_i(A)^{n_i-1} V_i \neq 0_n$  déterminer  $m_{A,V_i}(X)$
- 6) Pour  $q$  vecteurs colonne tels que définis à la question 5 on pose :  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_q$  et on pose  $d = n_1 + n_2 + \dots + n_q$ . Montrer que la famille  $(A^k V)_{k=0 \text{ à } d-1}$  est libre
- 7) En déduire que  $m_A(X) = m_{A,V}(X)$ .
- 8) On pose  $\mathbb{F}_1 = \{P(A)V : P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ . Montrer que  $\mathbb{F}_1$  est stable par  $A$  et que  $\mathbb{F}_1 = \text{Vect}[V, AV, \dots, A^{d-1}V]$
- 9) On complète la famille libre  $(V, AV, \dots, A^{d-1}V)$  en une base de  $\mathbb{E}_n$  et on considère la forme linéaire  $\Phi$  qui à tout vecteur colonne  $Y \in \mathbb{E}_n$  associe sa composante sur  $A^{d-1}V$  dans la base précédente.  
On définit alors  $\mathbb{F}_2 = \{Y \in \mathbb{E}_n : \forall i \in \mathbb{N} : \Phi(A^i Y) = 0\}$   
Montrer que  $\mathbb{F}_2 = \{Y \in \mathbb{E}_n : \forall i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket : \Phi(A^i Y) = 0\}$   
Montrer que  $\mathbb{F}_2$  est stable par  $A$  et que :  $\mathbb{E}_n = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$  (on pourra considérer  $\mathbb{F}_2$  comme noyau d'un endomorphisme à déterminer)
- 10) En déduire que  $A$  est semblable à une matrice formée de deux blocs diagonaux, le premier étant une matrice compagnon.
- 11) En déduire que  $A$  est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice compagnon.

Correction :

1) Introduisons les  $q$  polynômes premiers entre eux dans leur ensemble :

$$Q_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^q P_k(X)^{n_i}$$

D'après le théorème de Bezout, il existe une famille de  $q$  polynômes  $(U_i(X))_{i=1 \text{ à } q}$  tels que :

$$\sum_{i=1}^q U_i(X) Q_i(X) = 1$$

Ainsi, en désignant par  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$  :

$$\sum_{i=1}^q U_i(A) Q_i(A) = I_n$$

Soit, pour tout vecteur-colonne  $W$  d'ordre  $n$  :

$$\sum_{i=1}^q (U_i(A) Q_i(A) W) = W$$

Posons pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  :  $W_i = U_i(A) Q_i(A) W$ . On a :

$$P_i(A)^{n_i} W_i = U_i(A) P_i(A)^{n_i} Q_i(A) W = U_i(A) m_A(A) W = U_i(A) 0_n = 0_n$$

Donc :

$$W_i \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}_n = \text{Ker}(P_1(A)^{n_1}) + \text{Ker}(P_2(A)^{n_2}) + \dots + \text{Ker}(P_q(A)^{n_q})$$

Montrons alors que la somme est directe :

On a pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  :  $P_i(X)^{n_i}$  et  $Q_i(X)$  sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe un couple de polynômes  $(R_i(X), S_i(X))$  tels que :

$$R_i(X) P_i(X)^{n_i} + S_i(X) Q_i(X) = I_n$$

Soit  $W \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i}) \cap \sum_{k=1, k \neq i}^q \text{Ker}(P_k(A)^{n_k})$  alors :

$$P_i(A)^{n_i} W = 0_n$$

Et il existe une famille  $(W_k)_{k=1 \text{ à } q, k \neq i}$  telle que :

$$W = \sum_{k=1, k \neq i}^q W_k, \quad W_k \in \text{Ker}(P_k(A)^{n_k})$$

De plus :

$$R_i(A) P_i(A)^{n_i} W + S_i(A) Q_i(A) W = W$$

Or :

$$Q_i(A) W = \sum_{k=1, k \neq i}^q Q_i(A) W_k$$

Et :

$$Q_i(A) W_k = \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q P_j(A)^{n_j} \right) W_k = \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq k}}^q P_j(A)^{n_j} \right) P_k(A)^{n_k} W_k = \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq k}}^q P_j(A)^{n_j} \right) 0_n = 0_n$$

Ainsi :

$$Q_i(A) W = 0_n$$

Et :

$$W = 0_n$$

La somme est donc directe.

2) Soit  $W \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$  alors :

$$P_i(A)^{n_i} W = 0_n$$

Donc :

$$A P_i(A)^{n_i} W = 0_n$$

Soit :

$$P_i(A)^{n_i} A W = 0_n$$

D'où :

$$A W \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$$

3) Supposons par l'absurde :

$$\exists i \in \llbracket 1, q \rrbracket : \forall W \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i}) : P_i(A)^{n_i-1} W = 0_n$$

Soit alors  $W \in \mathbb{E}_n$  alors il existe une famille  $(W_k)_{k=1 \text{ à } q}$  telle que :

$$W = \sum_{k=1}^q W_k, \quad W_k \in \text{Ker}(P_k(A)^{n_k})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& P_i(A)^{n_i-1} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q P_j(A)^{n_j} \right) W \\
&= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q P_j(A)^{n_j} \right) P_i(A)^{n_i-1} W_i + \sum_{k=1}^q \left( P_i(A)^{n_i-1} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq k}}^q P_j(A)^{n_j} \right) P_k(A)^{n_k} W_k \right) \\
&= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q P_j(A)^{n_j} \right) 0_n + \sum_{k=1}^q \left( P_i(A)^{n_i-1} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq k}}^q P_j(A)^{n_j} \right) 0_n \right) = 0_n
\end{aligned}$$

Le polynôme :

$$P_i(X)^{n_i-1} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q P_j(X)^{n_j} \right)$$

est donc un polynôme annulateur non nul de  $A$  de degré strictement inférieur au degré du polynôme minimal de  $A$  ce qui est absurde.

4)  $I_Y$  n'est pas vide car il contient le polynôme minimal de  $A$ .

Considérons alors le sous ensemble de  $\mathbb{N}$  défini par :

$$J = \{d^\circ(P(X)) : P(X) \in I_Y, P(X) \text{ unitaire (de coefficient dominant égal à 1)}\}$$

$J$  n'est pas vide car il contient le degré du polynôme minimal.  $J$  possède donc un plus petit élément  $r$  qui est le degré d'un polynôme unitaire de  $I_Y$  que nous noterons  $M(X)$ .

Tout multiple de  $M(X)$  est de façon évidente dans  $I_Y$ .

Réciproquement, soit un polynôme  $P(X)$  de  $I_Y$  alors par division euclidienne, il existe un couple de polynôme  $(Q(X), R(X))$  tels que :

$$P(X) = M(X) Q(X) + R(X), \quad d^\circ(P(X)) < d^\circ(M(X))$$

Or :

$$R(X) = P(X) - M(X) Q(X)$$

Donc :

$$R(A)Y = P(A)Y - Q(A) M(A) Y = 0_n$$

Ainsi :

$$R(X) \in I_Y$$

Si on suppose par l'absurde  $R(X)$  non nul, on peut donc obtenir en divisant  $R(X)$  par son coefficient dominant un polynôme non nul et unitaire de  $I_Y$  de degré strictement inférieur à celui de  $M(X)$ , ce qui est absurde. Donc  $R(X)$  est nul. Ainsi :

$$P(X) = M(X) Q(X)$$

$I_Y$  est donc l'ensemble des polynômes multiples de  $M(X)$

5) Pour  $V_i \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$  tel que  $P_i(A)^{n_i-1}V_i \neq 0_n$  on a  $P_i(A)^{n_i}V_i = 0_n$

Donc  $P_i(X)^{n_i}$  est un polynôme unitaire de  $I_{V_i}$  mais pas  $P_i(X)^{n_i-1}$ . On en déduit :

$$m_{A,V_i}(X) = P_i(X)^{n_i}$$

6) Supposons

$$\sum_{k=0}^{d-1} (a_k A^k V) = 0_n$$

Alors :

$$\sum_{k=0}^{d-1} (a_k A^k V_1) + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k A^k V_2) + \dots + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k A^k V_q) = 0_n$$

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  :

$$\sum_{k=0}^{d-1} (a_k A^k V_i) \in \text{Ker}(P_i(A)^{n_i})$$

Ainsi, compte tenu de la somme directe :

$$\sum_{k=0}^{d-1} (a_k A^k V_i) = 0_n$$

Soit :

$$\left( \sum_{k=0}^{d-1} a_k A^k \right) V_i = 0_n$$

Posons :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

$P(X)$  est un polynôme de degré  $d - 1$  qui est donc multiple de chaque polynôme  $m_{A,V_i}(X)$ , ces derniers étant premiers entre eux deux à deux.  $P(X)$  est donc multiple de leur PPCM qui est leur produit et n'est autre que  $m_{A,V_i}(X)$  lequel est de degré  $d$ .

$P(X)$  est donc le polynôme nul. La famille  $(A^k V)_{k=0 \text{ à } d-1}$  est donc libre.

- 7)  $m_A(X)$  est un polynôme en  $A$  unitaire de degré  $d$  et annulateur de  $V$  et tout polynôme en  $A$  non nul de degré strictement inférieur à  $d$  ne peut être annulateur de  $V$  compte tenu du caractère libre de la famille  $(A^k V)_{k=0 \text{ à } d-1}$ . On en déduit :

$$m_{A,V}(X) = m_A(X)$$

8)  $A(\mathbb{F}_1) = \{A P(A)V : P(X) \in \mathbb{K}[X]\} \subset \mathbb{F}_1$

On a de façon évidente :

$$\text{Vect}[V, A V, \dots, A^{d-1} V] \subset \mathbb{F}_1$$

Réciproquement, soit  $P(A)V \in \mathbb{F}_1$ , on effectue la division euclidienne de  $P(X)$  par  $m_A(X)$  :

$$P(X) = m_A(X) Q(X) + R(X), \quad d^\circ(R(X)) < d^\circ(m_A(X)) = d$$

Alors :

$$P(A)V = Q(A) m_A(A) V + R(A)V = R(A)V \in \text{Vect}[V, A V, \dots, A^{d-1} V]$$

Donc :

$$\mathbb{F}_1 \subset \text{Vect}[V, A V, \dots, A^{d-1} V]$$

9)  $\mathbb{F}_2 = \{Y \in \mathbb{E}_n : \forall i \in \mathbb{N} : \Phi(A^i Y) = 0\}$

Soit  $Y \in \mathbb{F}_2$  alors :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \Phi(A^i A Y) = \Phi(A^{i+1} Y) = 0$$

Donc  $A Y \in \mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_2$  est stable par  $A$

Soit  $Y \in \mathbb{E}_n$  tel que :  $\forall i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket : \Phi(A^i Y) = 0$  alors pour  $j \in \mathbb{N}$  la division euclidienne de  $X^j$  par  $m_A(X)$  s'écrit :

$$X^j = m_A(X) Q(X) + R(X), \quad d^\circ(R(X)) < d^\circ(m_A(X)) = d$$

Ainsi :

$$A^j Y = Q(A) m_A(A) Y + R(A) Y = R(A) Y$$

Posons :

$$R(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

Alors :

$$\Phi(A^j Y) = \Phi(R(A) Y) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(A^k Y) = 0$$

Donc :

$$\mathbb{F}_2 = \{Y \in \mathbb{E}_n : \forall i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket : \Phi(A^i Y) = 0\}$$

Considérons L'application linéaire  $\psi$  de  $\mathbb{E}_n$  dans  $\mathbb{C}^d$  définie par :

$$\psi(Y) = (\Phi(Y), \Phi(A Y), \dots, \Phi(A^{d-1} Y))$$

On a :

$$\mathbb{F}_2 = \text{Ker}(\psi)$$

Et :

$$\psi(V) = (0, 0, \dots, 1) = E_1$$

$$\psi(A V) = (0, 0, \dots, 1, 0) = E_2$$

$$\psi(A^2 V) = (0, 0, \dots, 1, 0, 0) = E_3$$

$$\psi(A^{d-1} V) = (1, 0, \dots, 0, 0) = E_d$$

Donc :

$$\text{Vect}(E_1, E_2, \dots, E_d) \subset \text{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}^d$$

Soit en termes de dimensions :

$$d \leq \dim(\text{Im}(\psi)) \leq d$$

D'où :

$$\dim(\text{Im}(\psi)) = d$$

Le théorème du rang s'écrit alors :

$$\dim(\text{Ker}(\psi)) + \dim(\text{Im}(\psi)) = \dim(\mathbb{E}_n)$$

Soit :

$$\dim(\mathbb{F}_2) + d = n$$

Donc :

$$\dim(\mathbb{F}_2) + \dim(\mathbb{F}_1) = \dim(\mathbb{E}_n)$$

Reste à regarder le caractère direct de la somme.

Soit  $Y \in \mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$  alors

$$Y = \sum_{k=0}^{d-1} a_k A^k V$$

Et :

$$\Phi(Y) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(A^k V) = a_{d-1}$$

$$\begin{aligned}\Phi(A Y) &= \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(A^{k+1} V) = a_{d-2} \\ &\dots \\ \Phi(A^{d-1} Y) &= \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(A^{k+d-1} V) = a_0\end{aligned}$$

La nullité de tous ces termes entraîne la nullité de  $Y$ . Ainsi

$$\mathbb{E}_n = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$$

- 10) La base de  $\mathbb{F}_1$   $(V, A V, \dots, A^{d-1} V)$  peut maintenant être complétée par une base  $(W_1, W_2, \dots, W_{n-d})$  de  $\mathbb{F}_2$  pour former une base de  $\mathbb{E}_n$ . Si nous notons  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{E}_n$  dans cette base alors  $P^{-1} A P$  est une matrice formée de deux blocs diagonaux, le premier  $C$  étant une matrice compagnon dont la dernière colonne est constituée des termes  $(a_0, a_1, \dots, a_{d-1})$  tels que :

$$m_A(X) = X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \dots - a_1 X - a_0$$

- 11) On procède par récurrence. Soit le second bloc diagonal est une matrice compagnon, soit il ne l'est pas et dans ce cas, en notant  $A'$  la matrice carrée d'ordre  $n-d$  correspondante, on applique à cette matrice le résultat établi au 10, à savoir, l'existence d'une matrice inversible  $P'$  d'ordre  $n-d$  telle que  $P'^{-1} A' P'$  soit formée de deux blocs diagonaux, le premier bloc  $C'$  étant une matrice compagnon. On forme alors la matrice inversible d'ordre  $n$   $P''$  avec deux blocs diagonaux, le premier étant la matrice identité  $I_d$  d'ordre  $d$  et le second  $P'$ .  $P''^{-1}$  est alors également formée de deux blocs diagonaux, le premier bloc étant  $I_d$  et le second  $P'^{-1}$ . Ainsi  $P''^{-1} P^{-1} A P P''$  sera une matrice formée de trois blocs diagonaux, les deux premiers  $C$  et  $C'$  étant des matrices compagnons, selon ce schéma explicatif utilisant le calcul de produit de matrices par blocs (les zéros figurant étant des blocs rectangulaire de taille adaptée dont tous les termes sont nuls) :

$$\begin{aligned}P''^{-1} P^{-1} A P P'' &= \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & P'^{-1} A' P' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Soit finalement, en posant  $Q = P P''$  donc  $Q^{-1} = P''^{-1} P^{-1}$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C' & 0 \\ 0 & 0 & A'' \end{pmatrix}$$

Le processus peut être réitéré avec  $A''$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir la forme souhaitée