<u>Enoncé</u> :

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé et $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$,

1) Montrer que :

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{t}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}\|$$

2) En déduire que :

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{t}\| + \|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\|$$

<u>Preuve</u> :

1) L'inégalité triangulaire s'écrit :

$$\|(x - t) + t\| \leq \|x - t\| + \|t\|$$

Il en découle :

$$\|x\| - \|t\| \leq \|x - t\|$$

2) Considérons :

$$2\,(\|x - t\| + \|y - z\|) = \|x - t\| + \|x - t\| + \|y - z\| + \|y - z\|$$

$$= (\|x - t\| - \|x - z\|) + \|x - z\| + (\|x - t\| - \|x - y\|) + \|x - y\|$$

$$+ (\|y - z\| - \|y - x\|) + \|y - x\| + (\|y - z\| - \|y - t\|) + \|y - t\|$$

$$\leq \|t - z\| + \|x - z\| + \|t - y\| + \|x - y\|$$

$$+ \|z - x\| + \|y - x\| + \|z - t\| + \|y - t\|$$

$$= 2\,(\|x - y\| + \|y - t\| + \|t - z\| + \|z - x\|)$$

Il en résulte l'inégalité cherchée.