Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note :

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

1) Déterminer deux réels x et y tels que :

$$\boldsymbol{A^2 = x\,A + y\,I}$$

2) On suppose A nilpotente non nulle. Montrer que l'on a : $\boldsymbol{det(A) = Tr(A) = 0}$ et que l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à 2.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit nilpotente.

4) Donner un exemple de matrice nilpotente ayant comme première colonne :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Réponse :

1) Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b\,c & a\,b + d\,b \\ a\,c + d\,c & d^2 + b\,c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b\,c & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c & d^2 + b\,c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+d-d)\,a + b\,c & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c & (a+d-a)\,d + b\,c \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a\,d - b\,c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{A^2 = Tr(A)\,A - det(A)\,I}$$

2) soit p l'indice de nilpotence de A alors on a : $p \geq 2$ car A non nulle et $A^{p-1} \neq 0$, $A^p = 0$. Or :

$$A^{p-1}A^2 = Tr(A)\,A^{p-1}\,A - det(A)\,A^{p-1}$$

Donc :

$$A^{p+1} = Tr(A)\,A^p - det(A)\,A^{p-1}$$

Soit :

$$0 = -det(A)\,A^{p-1}$$

Donc :

$$det(A) = 0$$

Ainsi :

$$A^2 = Tr(A)\, A$$

Et :

$$A^{p-2}A^2 = Tr(A)\, A^{p-2}A$$

Soit :

$$A^p = Tr(A)\, A^{p-1}$$

Donc :

$$0 = Tr(A)\, A^{p-1}$$

D'où :

$$Tr(A) = 0$$

Ainsi :

$$A^2 = 0$$

L'indice de nilpotence est donc inférieur ou égal à 2.

3) Notons que réciproquement si A est telle que : $det(A) = Tr(A) = 0$ alors $A^2 = 0$ donc A est nilpotente. D'où :

$$\boxed{A \text{ est nilpotente si et seulement si } det(A) = Tr(A) = 0}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$