

Matrices de symétrie 4x4

Enoncé :

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à savoir :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1))$$

Soit f la symétrie de $\mathbb{R}^4$ telle que :

$$N(f - Id) = Vect[(1,0,2,4); (0,1, -1, -1)]$$

$$N(f + Id) = Vect[(2,3,0,3); (4,2,3,9)]$$

- 1) Déterminer la matrice A de f dans la base :

$$\mathcal{B}_2 = ((1,0,2,4); (0,1, -1, -1); (2,3,0,3); (4,2,3,9))$$

- 2) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$
- 3) Calculer P^{-1}
- 4) En déduire la matrice B de f dans la base canonique
- 5) Vérifier que le carré de cette matrice est bien la matrice identité d'ordre 4

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice $C = P^{-1}A P$ dans la base canonique.

- 6) Montrer que g est involutif
- 7) Déterminer les éléments de C
- 8) Déterminer les caractéristiques de la symétrie g

Solution :

1) La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}_2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) La matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

3) Inversons P par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 4t = x' \\ y + 3z + 2t = y' \\ 2x - y + 3t = z' \\ 4x - y + 3z + 9t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 4t = x' \\ y + 3z + 2t = y' \\ -y - 4z - 5t = -2x' + z' \\ -y - 5z - 7t = -4x' + t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 4t = x' \\ y + 3z + 2t = y' \\ -z - 3t = -2x' + y' + z' \\ -2z - 5t = -4x' + y' + t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 4t = x' \\ y + 3z + 2t = y' \\ -z - 3t = -2x' + y' + z' \\ t = -y' - 2z' + t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = x' + 4y' + 8z' - 4t' \\ y + 2z = 3y' + 4z' - 2t' \\ -z = -2x' - 2y' - 5z' + 3t' \\ t = -y' - 2z' + t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3x' + 0y' - 2z' + 2t' \\ y = -6x' - 3y' - 11z' + 7t' \\ z = 2x' + 2y' + 5z' - 3t' \\ t = 0x' - y' - 2z' + t' \end{cases}$$

Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & -11 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que l'on a bien $P^{-1}P = I_4$

4) La matrice B de f dans la base canonique est :

$$B = P A P^{-1}$$

Or :

$$P A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & -11 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 & 4 \\ -12 & -7 & -22 & 14 \\ 0 & 6 & 13 & -6 \\ -12 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

5)

On vérifie (éventuellement avec une calculatrice ayant l'option matrice) : $B^2 = I_4$

6)

$$C^2 = P^{-1}A P P^{-1}A P = P^{-1}A I_4 A P = P^{-1}A^2 P = P^{-1}P = I_4$$

donc g est involutif et est donc la symétrie par rapport à $N(g - Id)$ parallèlement à $N(g + Id)$.

7)

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & -11 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 11 & -7 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 11 & -7 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -12 & -24 \\ -12 & -7 & -42 & -60 \\ 4 & 4 & 19 & 24 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

8) On a :

$$C P^{-1} = P^{-1} A$$

et A matrice diagonale donc les deux premières colonnes de P^{-1} forment une famille libre de $N(C - I_4)$ et les deux suivantes une famille libre de $N(C + I_4)$. Ainsi :

$$N(g - Id) = Vect[(-3, -6, 2, 0); (0, -3, 2, -1)]$$

$$N(g + Id) = Vect[(-2, -11, 5, -2); (2, 7, -3, 1)]$$