Matrice de symétrie 3x3

Enoncé :

Soit A la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ relativement à sa base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que l'endomorphisme f est involutif, à savoir : $f \circ f = Id$
2) En déduire que c'est une symétrie et en déterminer les caractéristiques

Solution :

1) La matrice de $f \circ f$ relativement à la base canonique est la matrice A^2et :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

On en déduit :

$$f \circ f = Id$$

2) f est donc la symétrie par rapport à $N(f - Id)$ parallèlement à $N(f + Id)$. Déterminons donc ces deux sous-espaces.

Détermination de $N(f - Id)$

On résoud :

$$(A - I_3)\, X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -2\, y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$N(f - Id) = \{(z, 0, z) \ \ z \ \in \mathbb{R}\} = \{z\ (1,0,1) \ \ z \ \in \mathbb{R}\} = Vect[(1,0,1)]$$

C'est donc une droite vectorielle

<u>Détermination de $N(f + Id)$</u>

On résoud :

$$(A + I_3)\, X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ x = -z$$

Ainsi :

$$N(f + Id) = \{(-z, 0, z) \ \ z \ \in \mathbb{R}\} = \{z\ (-1,0,1) \ \ z \ \in \mathbb{R}\} = Vect[(-1,0,1)]$$

C'est donc une droite vectorielle. A noter qu'elle est orthogonale à la précédente.

f est donc la symétrie orthogonale par rapport à $Vect[(1,0,1)]$