On considère p techniciens qui interviennent auprès d'une machine. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on note X_k la variable aléatoire donnant la durée en heures de l'intervention du $k-i$ème technicien. On suppose que les variables $(X_k)_{k\in[\![1;p]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ

1) **Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $E({X_k}^n)$**
2) **On note $Y_p = min(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Déterminer la densité de Y_p et en déduire la nature de la loi suivie par Y_p, son espérance puis sa variance**
3) **On suppose dans cette question uniquement que $p = 2$ et que la durée moyenne de l'intervention du premier technicien est de deux heures. Calculer alors les probabilités suivantes :**
   a) **Probabilité que la durée de l'intervention du second technicien soit inférieure ou égale à 2 heures**
   b) **Probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est supérieure ou égale à 2.**
   c) **Probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à deux heures**
4) **On note $Z_2 = max(X_1, X_2)$. Déterminer la densité de Z_2, son espérance et sa variance et justifier sans calculs : $E(X_1) + E(X_2) = E(Y_2) + E(Z_2)$**
5) **Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = a\,X_2 + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \times \mathbb{R}$ puis déterminer la densité de la variable aléatoire $T = X_1 + a\,X_2 + b$. En déduire qu'il existe un unique couple (a, b) pour lequel T et Z_2 suivent la même loi.**
6) **On considère la variable aléatoire :**

$$T_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} X_k$$

Démontrer par récurrence sur p que T_p admet pour densité :

$$f_{T_p}(x) = \begin{cases} \lambda\, p\, e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{p-1} \; si\; x \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Calculer l'espérance et la variance de T_p et en donner la limite quand p tend vers l'infini.

Solution :

1) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(X_k{}^n) = \int_0^{+\infty} t^n \ \lambda \, e^{-\lambda t} \, dt$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u(t) = t^n, \qquad v'(t) = \lambda \, e^{-\lambda t}$$

$$u'(t) = n \, t^{n-1}, \qquad V(t) = - \, e^{-\lambda t}$$

$$E(X_k{}^n) = \left[-t^n \, e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} \ \ e^{-\lambda t} \, dt$$

Soit :

$$E(X_k{}^n) = \frac{n}{\lambda} \, E\left(X_k{}^{n-1}\right)$$

Ainsi par une récurrence évidente :

$$E(X_k{}^n) = \frac{n}{\lambda} \, \frac{n-1}{\lambda} \dots \frac{2}{\lambda} \, E(X_k) = \frac{n}{\lambda} \, \frac{n-1}{\lambda} \dots \frac{2}{\lambda} \, \frac{1}{\lambda}$$

Soit :

$$\boxed{E(X_k{}^n) = \frac{n!}{\lambda^n}}$$

2) On a pout tout réel $t \in [0, +\infty[$:

$$P\left(Y_p > t\right) = P\left((X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \dots \cap \left(X_p > t\right)\right)$$

$$= P(X_1 > t) \, P(X_2 > t) \dots P\left(X_p > t\right)$$

$$= e^{-\lambda t} \, e^{-\lambda t} \dots . \, e^{-\lambda t} = e^{-p \lambda t}$$

Donc :

$$F_{Y_p}(t) = P\left(Y_p < t\right) = 1 - e^{-p \lambda t}$$

$$f_{Y_p}(t) = F'_{Y_p}(t) = p \, \lambda \, e^{-p \lambda t}$$

Y_p suit donc une loi exponentielle de paramètre $p \, \lambda$. On en déduit :

$$\boxed{E(Y_p) = \frac{1}{p\,\lambda}, \qquad V(Y_p) = \frac{1}{p^2\,\lambda^2}}$$

3)

a) On a :

$$P(X_2 \leq 2) = 1 - e^{-2\,\lambda}$$

b)

$$P(Y_2 \leq 1 \,/\, X_2 \geq 2) = \frac{P(Y_2 \leq 1 \cap X_2 \geq 2)}{P(X_2 \geq 2)} = \frac{P(X_1 \leq 1 \cap X_2 \geq 2)}{P(X_2 \geq 2)}$$

$$= \frac{P(X_1 \leq 1) P(X_2 \geq 2)}{P(X_2 \geq 2)} = P(X_1 \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}$$

c)

$$P(Y_2 \leq 2) = 1 - e^{-4\,\lambda}$$

4) On a pout tout réel $t \in [0, +\infty[$:

$$F_{Z_2}(t) = P(Z_2 \leq t) = P\big((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)\big)$$

$$= P(X_1 \leq t)\, P(X_2 \leq t)$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda\, t}\right)\left(1 - e^{-\lambda\, t}\right) = \left(1 - e^{-\lambda\, t}\right)^2$$

Donc :

$$\boxed{f_{Z_2}(t) = F'_{Z_2}(t) = 2\,\lambda\, e^{-\lambda\, t}\left(1 - e^{-\lambda\, t}\right) = 2\,\lambda\, e^{-\lambda\, t} - 2\,\lambda\, e^{-2\,\lambda\, t}}$$

On en déduit :

$$E(Z_2) = \int_0^{+\infty} t\left(2\,\lambda\, e^{-\lambda\, t} - 2\,\lambda\, e^{-2\,\lambda\, t}\right) dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} t\,\lambda\, e^{-\lambda\, t}\; dt - \int_0^{+\infty} t\; 2\,\lambda\, e^{-2\,\lambda\, t}\; dt$$

$$= 2\,\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

$$E\left({Z_2}^2\right) = \int_0^{+\infty} t^2\left(2\,\lambda\, e^{-\lambda\, t} - 2\,\lambda\, e^{-2\,\lambda\, t}\right) dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} t^2\,\lambda\, e^{-\lambda\, t}\; dt - \int_0^{+\infty} t^2\; 2\,\lambda\, e^{-2\,\lambda\, t}\; dt$$

$$= 2\left(\frac{2}{\lambda^2}\right) - \left(\frac{2}{(2\,\lambda)^2}\right) = \frac{4}{\lambda^2} - \frac{1}{2\,\lambda^2} = \frac{7}{2\,\lambda^2}$$

$$V(Z_2) = \frac{7}{2\,\lambda^2} - \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = \frac{7}{2\,\lambda^2} - \frac{9}{4\,\lambda^2} = \frac{5}{2\,\lambda^2}$$

De plus :

$$X_1 + X_2 = Y_2 + Z_2$$

donc :

$$E(X_1 + X_2) = E(Y_2 + Z_2)$$

$$E(X_1) + E(X_2) = E(Y_2) + E(Z_2)$$

5) On a pour tout réel $t \in [b, +\infty[$:

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(a\,X_2 + b \leq t)$$

$$= P\left(X_2 \leq \frac{t-b}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda\frac{t-b}{a}}$$

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda\frac{t-b}{a}}$$

et pour $t \in]-\infty, b]$: $F_Y(t) = 0, f_Y(t) = 0$

On a alors pour tout réel $x \in [b, +\infty[$:

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-t)\, f_Y(t)\, dt$$

$$= \int_{b}^{x} f_{X_1}(x-t)\, f_Y(t)\, dt$$

$$= \int_{b}^{x} \lambda\, e^{-\lambda\,(x-t)}\ \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda\frac{t-b}{a}}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^2}{a} e^{-\lambda\,x}\, e^{\lambda\frac{b}{a}} \int_{b}^{x} e^{\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right)t}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^2}{a} e^{-\lambda x} e^{\lambda \frac{b}{a}} \left[\frac{e^{\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right) t}}{\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right)} \right]_b^x$$

$$= \frac{\lambda^2}{a \lambda \left(1-\frac{1}{a}\right)} e^{-\lambda x} e^{\lambda \frac{b}{a}} \left(e^{\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right) x} - e^{\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right) b} \right)$$

$$= \frac{\lambda}{a-1} \left(e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} - e^{-\lambda(x-b)} \right)$$

et pour $t \in]-\infty, b]$: $f_T(x) = 0$

T et Z_2 suivent alors la même loi si et seulement si on a :

D'une part : $b = 0$

D'autre part pour tout réel $x \in [0, +\infty[$:

$$\frac{\lambda}{a-1} \left(e^{-\frac{\lambda}{a} x} - e^{-\lambda x} \right) = 2 \lambda \left(e^{-\lambda x} - e^{-2 \lambda x} \right)$$

L'identification donne :

$$a = \frac{1}{2}$$

6) Initialisation pour $p = 1, T_1 = X_1$ admet pour densité :

$$f_{T_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{1-1} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

La propriété est donc vraie au rang 1. Supposons la vraie au rang $p \geq 1$ alors :

$$T_{p+1} = T_p + \frac{1}{p+1} X_{p+1}$$

Posons :

$$Y = \frac{1}{p+1} X_{p+1}$$

Et calculons sa densité :

Si $t \leq 0$, $P(Y < t) = 0$

Si $t > 0$:

$$P(Y < t) = P\left(\frac{1}{p+1} X_{p+1} < t\right)$$

$$= P\big(X_{p+1} < (p+1)\, t\big)$$

$$= 1 - e^{-\lambda\,(p+1)\,t}$$

D'où :

$$f_Y(t) = \lambda\,(p+1)\, e^{-\lambda\,(p+1)\,t}$$

Ainsi pour $x > 0$:

$$f_{T_{p+1}}(x) = \int_0^x f_{T_p}(x-t)\, f_Y(t)\, dt$$

$$= \int_0^x \lambda\, p\, e^{-\lambda\,(x-t)} \left(1 - e^{-\lambda\,(x-t)}\right)^{p-1} \lambda\,(p+1)\, e^{-\lambda\,(p+1)\,t}\, dt$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u'(t) = \lambda\, p\, e^{-\lambda\,(x-t)} \left(1 - e^{-\lambda\,(x-t)}\right)^{p-1},\;\; v(t) = \lambda\,(p+1)\, e^{-\lambda\,(p+1)\,t}$$

$$u(t) = -\left(1 - e^{-\lambda\,(x-t)}\right)^{p},\;\; v'(t) = -\,\lambda^2\,(p+1)^2\, e^{-\lambda\,(p+1)\,t}$$

Alors :

$$f_{T_{p+1}}(x) = \left[-\left(1 - e^{-\lambda\,(x-t)}\right)^{p} \lambda\,(p+1)\, e^{-\lambda\,(p+1)\,t}\right]_0^x - \int_0^x \left(1 - e^{-\lambda\,(x-t)}\right)^{p} \lambda^2\,(p+1)^2\, e^{-\lambda\,(p+1)\,t}\, dt$$

$$= \lambda\,(p+1)\left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)^{p} - \lambda^2\,(p+1)^2 \int_0^x \left(1 - e^{-\lambda\,(x-t)}\right)^{p} \left(e^{-\lambda\,t}\right)^{p} e^{-\lambda\,t}\, dt$$

$$= \lambda\,(p+1)\left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)^{p} - \lambda^2\,(p+1)^2 \int_0^x \left(e^{-\lambda\,t} - e^{-\lambda\,x}\right)^{p} e^{-\lambda\,t}\, dt$$

$$= \lambda\,(p+1)\left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)^{p} - \lambda^2\,(p+1)^2 \left[\frac{\left(e^{-\lambda\,t} - e^{-\lambda\,x}\right)^{p+1}}{-\lambda\,(p+1)}\right]_0^x$$

$$= \lambda\,(p+1)\left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)^{p} - \lambda\,(p+1)\left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)^{p+1}$$

$$= \lambda\,(p+1)\left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)^{p} \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda\,x}\right)\right)$$

$$= \lambda\,(p+1)\,e^{-\lambda\,x}\,\left(1-e^{-\lambda\,x}\right)^p$$

Et pour $x \leq 0$:

$$f_{T_{p+1}}(x) = 0$$

La propriété est donc vraie au rang $p+1$ donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Voyons l'espérance et la variance :

$$E(T_p) = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k}E(X_k)\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k}\,\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} \sim \frac{1}{\lambda}\,Ln(k)$$

$$V(T_p) = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k^2}V(X_k)\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\pi^2}{6}$$

L'espérance de T_p tend donc vers $+\infty$ mais sa variance tend vers $\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\pi^2}{6}$