

Enoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité
- 2) Déterminer la fonction de répartition associée
- 3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$ et déterminer sa fonction réciproque.

- 4) On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \varphi(X)$

Déterminer la densité de Y et en déduire la loi suivie par Y

Solution :

- 1) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx = \left[\frac{1}{1 + e^{-x}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

- 2) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \left[\frac{1}{1 + e^{-t}} \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- 3) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$$

Donc φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$

Ainsi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times] -1; 1[:$

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} &\Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1 \\ &\Leftrightarrow y e^x + y = e^x - 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + y = e^x - y e^x \\ &\Leftrightarrow 1 + y = e^x(1 - y) \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + y}{1 - y} = e^x \\ &\Leftrightarrow x = \text{Ln}\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi^{-1}(y) = \text{Ln}\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

4) On a pour tout $t \in] -1; 1[:$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y < t) = P(\varphi(X) < t) = P(X < \varphi^{-1}(t)) \\ &= F(\varphi^{-1}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= F'_Y(t) = F'(\varphi^{-1}(t)) \times \varphi^{-1'}(t) = f(\varphi^{-1}(t)) \times \varphi^{-1'}(t) \\ &= \frac{e^{-\varphi^{-1}(t)}}{(1 + e^{-\varphi^{-1}(t)})^2} \times \left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) \\ &= \frac{\frac{1 - t}{1 + t}}{\left(1 + \frac{1 - t}{1 + t}\right)^2} \times \left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) \\ &= \frac{(1 + t)(1 - t)}{4} \times \frac{2}{(1 + t)(1 - t)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi uniforme sur $] -1; 1[$