Enoncé 1

Le nombre de clients N_t entrant dans un certain magasin pendant une durée de temps t suit une loi de Poisson de paramètre t. Pour tout entier naturel non nul n, on note T_n l'instant d'arrivée du n-ième client à partir d'un instant pris comme origine.

1) **Exprimer l'évènement $(T_n \leq t)$ à l'aide de N_t puis déterminer la loi de T_1, son espérance et sa variance**
2) **Déterminer la fonction de répartition de T_n en fonction de n et t et en déduire la fonction densité de T_n**
3) **Déterminer l'espérance puis la variance de T_n**

Enoncé 2

n véhicules numérotés de 1 à n $(n \geq 2)$ sont engagés dans un rallye automobile. On suppose que les premiers véhicules ne peuvent pas arriver avant 5 heures après le départ de la course et on prend cet instant pour origine des temps. Pour tout i, on note U_i l'heure d'arrivée (exprimée en heure) du véhicule de numéro i et on suppose que les variables U_i sont mutuellement indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi le premier véhicule peut arriver à n'importe quel moment entre 5 heures et 6 heures après le départ de la course.

Pour tout $t \in [0, 1]$ on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de véhicules déjà arrivés à l'instant t

Enfin, on note T_i l'heure d'arrivée du véhicule classé en i-ème position.Déterminer la loi de N_t

1) **Déterminer pour tout i la fonction de répartition puis la densité de T_i et calculer son espérance**

Enoncé 3 :

Densité associée à

$$G(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}, t \in [1, +\infty[, \qquad 0 \; sinon$$

On pourra vérifier :

$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$$

<u>Solution énoncé 1</u> :

1) Le n-ième client arrive avant ou à un instant t équivaut à dire que le nombre de clients entrés sur l'intervalle de temps $[0, t]$ est supérieur ou égal à n soit pour $t > 0$

$$(T_n \leq t) = (N_t \geq n)$$

Ainsi pour $t > 0$:

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = P(N_t \geq 1) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-t}$$

$$f_{T_1}(t) = F'_{T_1}(t) = e^{-t}$$

Donc T_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1 et ainsi :

$$E(T_1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$V(T_1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

2) pour $t > 0$:

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(N_t \geq n) = e^{-t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

$$f_{T_n}(t) = F'_{T_n}(t) = -e^{-t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + e^{-t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-t} \left(\sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right)$$

$$\boxed{f_{T_n}(t) = e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}}$$

3) On a :

$$\lim_{t \to +\infty} t\, e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

Donc l'espérance de T_n est bien définie et :

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma_n = \int_0^{+\infty} t^n \, e^{-t} \, dt$$

Et faisons une intégration par partie pour $n \in \mathbb{N}^*$ en posant :

$$u(t) = t^n \;\; ; \quad v'(t) = e^{-t}$$

$$u'(t) = n \, t^{n-1} \, ; \quad v(t) = -e^{-t}$$

Alors :

$$\Gamma_n = \left[-t^n \, e^{-t}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} \, e^{-t} \, dt = n \, \Gamma_{n-1}$$

Or :

$$\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$$

On en déduit pour tout pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma_n = n!$$

Ainsi :

$$\boxed{E(T_n) = \frac{n!}{(n-1)!} = n}$$

De même :

$$E\left({T_n}^2\right) = \int_0^{+\infty} t^{\,2} e^{-t} \, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n+1} \, e^{-t} \, dt = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n \, (n+1)$$

$$\boxed{V(T_n) = n \, (n+1) - n^2 = n}$$

Solution énoncé 2 :

1) Considérons pour i entier allant de 1 à n les évènements :

$$S_{t,i} = \text{"}le\ véhicule\ de\ numéro\ i\ est\ arrivé\ avant\ ou\ à\ l'instant\ t\text{"}$$

Nous avons alors :

$$P(S_{t,i}) = P(U_i \leq t) = t$$

Les évènements $S_{t,i}$ sont mutuellement indépendants de même probabilité et N_t compte le nombre de ces évènements réalisés. Donc N_t suit une loi binomiale de paramètres n et $p = t$.

2) On déduit de ce qui précède pour tout $t \in [0,1]$:

$$F_{T_i}(t) = P(T_i \leq t) = P(N_t \geq i)$$

$$\boxed{F_{T_i}(t) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\ t^k\ (1-t)^{n-k}}$$

$$f_{T_i}(t) = F_{T_i}'^{(t)} = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n}{k}\ (t^{k-1}\ (1-t)^{n-k} - (n-k)\ t^k\ (1-t)^{n-k-1}) + n\ t^{n-1}$$

$$= \sum_{k=i}^{n-1} \left(k\ \binom{n}{k}\ t^{k-1}\ (1-t)^{n-k} - (k+1)\ \binom{n}{k+1}\ t^k\ (1-t)^{n-k-1}\right) + n\ t^{n-1}$$

Il apparaît une somme télescopique donc :

$$f_{T_i}(t) = i\ \binom{n}{i}\ t^{i-1}\ (1-t)^{n-i} - n\ \binom{n}{n}\ t^{n-1} + \ n\ t^{n-1}$$

Soit :

$$\boxed{f_{T_i}(t) = i\ \binom{n}{i}\ t^{i-1}\ (1-t)^{n-i}}$$

Vérifions que nous avons bien affaire à une densité.

$$\int_0^1 f_{T_i}(t)\ dt = i\ \binom{n}{i} \int_0^1 t^{i-1}\ (1-t)^{n-i}\ dt$$

Pour $1 < i \leq n$ faisons une intégration par partie :

$$u(t) = t^{i-1}, \qquad v'(t) = (1-t)^{n-i}$$

$$u'(t) = (i-1)\ t^{i-2}\ , \qquad v(t) = \frac{-\ (1-t)^{n-i+1}}{n-i+1}$$

$$\int_0^1 f_{T_i}(t)\ dt = i\ \binom{n}{i}\left(\left[\frac{-\ t^{i-1}\ (1-t)^{n-i+1}}{n-i+1}\right]_0^1 + \frac{(i-1)}{n-i+1}\int_0^1 t^{i-2}\ (1-t)^{n-i+1}\ dt\right)$$

$$= i\ \binom{n}{i}\ \frac{(i-1)}{n-i+1}\int_0^1 t^{i-2}\ (1-t)^{n-i+1}\ dt$$

$$= (i-1)\ \binom{n}{i-1}\ \int_0^1 t^{i-2}\ (1-t)^{n-i+1}\ dt$$

On en déduit que l'expression a la valeur correpsondant à $i = 2$ soit

$$\int_0^1 f_{T_i}(t)\ dt = \binom{n}{1}\ \int_0^1 (1-t)^{n-1}\ dt = n\ \left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 = 1$$

Donc f_{T_i} est bien une densité. Calculons son espérance.

$$E(T_i) = \int_0^1 t\ f_{T_i}(t)\ dt = i\ \binom{n}{i}\int_0^1 t^i\ (1-t)^{n-i}\ dt$$

Pour $1 \leq i \leq n$ faisons une intégration par partie :

$$u(t) = t^i\ , \qquad v'(t) = (1-t)^{n-i}$$

$$u'(t) = i\ \ t^{i-1}\ , \qquad v(t) = \frac{-\ (1-t)^{n-i+1}}{n-i+1}$$

$$E(T_i) = i\ \binom{n}{i}\left(\left[\frac{-\ t^{i}\ (1-t)^{n-i+1}}{n-i+1}\right]_0^1 + \frac{i}{n-i+1}\int_0^1 t^{i-1}\ (1-t)^{n-i+1}\ dt\right)$$

$$= i\ \binom{n}{i}\ \frac{i}{n-i+1}\int_0^1 t^{i-1}\ (1-t)^{n-i+1}\ dt$$

$$= i\ \binom{n}{i-1}\ \int_0^1 t^{i-1}\ (1-t)^{n-i+1}\ dt$$

Donc :

$$E(T_i) = i \binom{n}{0} \int_0^1 (1-t)^n \, dt = i \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{i}{n+1}$$

<u>Solution énoncé 3</u> :

Vérifions d'abord l'identité :

$$k \binom{n}{k} = \frac{k \; n!}{k! \; (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \; (n-k)!}$$

$$= \frac{(n-k+1) \; n!}{(k-1)! \; (n-k+1)!} = (n-k+1) \binom{n}{k-1}$$

Dérivons la fonction de répartition :

$$G'(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \left[k \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} + \left(1-\frac{1}{t}\right)^k (n-k) \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k-1} \left(-\left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \right]$$

$$= \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \left[k \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} + \left(1-\frac{1}{t}\right)^k (n-k) \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k-1} \left(-\left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \right]$$

$$= \sum_{k=r}^{n} k \binom{n}{k} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-k} - \sum_{k=n}^{+\infty} (n-k) \binom{n}{k} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=r}^{n} (n+1-k) \binom{n}{k-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-k} - \sum_{k=n}^{+\infty} (n-k) \binom{n}{k} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=r}^{n} \left(\big(n-(k-1)\big) \binom{n}{k-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-(k-1)} - (n-k) \binom{n}{k} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{k} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-k} \right)$$

$$(\textit{On reconnait une somme télescopique})$$

$$= \big(n-(r-1)\big) \binom{n}{r-1} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-(r-1)} - (n-n) \binom{n}{n} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{n} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-n}$$

$$\boxed{G'(t) = r \binom{n}{r} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-r}}$$