

Exercices 1 : Langage et logique mathématique

a) Lien logique entre propositions

En remplaçant le ? par un des connecteurs propositionnels $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$, relier logiquement les propositions suivantes :

$$"\exists x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))" \quad ? \quad "\exists x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))"$$

$$"\exists x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad ? \quad "(\exists x \in E : P(x)) \text{ et } (\exists x \in E : Q(x))"$$

$$"(\exists x \in E : P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E : Q(x))" \quad ? \quad "\exists x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

$$"\forall x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad ? \quad "(\exists x \in E : P(x)) \text{ et } (\exists x \in E : Q(x))"$$

$$"\forall x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad ? \quad "(\forall x \in E : P(x)) \text{ et } (\forall x \in E : Q(x))"$$

$$"(\forall x \in E : P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E : Q(x))" \quad ? \quad "\forall x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

Pour la ligne précédente, montrer par un exemple concret qu'il n'y a pas équivalence entre les propositions.

b) Application

$$P = "\exists x \in \mathbb{R} : (x > 2 \text{ et } x < 1)"$$

$$R = "(\exists x \in \mathbb{R} : x > 2) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R} : x < 1)"$$

Noter que P est fausse et montrer que R est vraie.

c) Ecrire la négation des propositions

$$A = "\forall x \in E \forall y \in F : x \leq y \text{ ou } x + y = 7)"$$

$$B = "\forall x \in E \forall y \in E : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) "$$

$$C = "\forall y \in F \exists x \in E : y = f(x) "$$

d) Soit une suite réelle U

Ecrire la négation de la proposition suivante traduisant que la suite U tend vers une limite finie L

$$D = "\forall \epsilon \in]0 ; +\infty[: \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow L - \epsilon < U_n < L + \epsilon"$$

Correction

Exercice 1 : Logique (8 points)

a)

$$"\exists x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))" \quad \Leftarrow \quad "\exists x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))"$$

$$"\exists x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad \Rightarrow \quad "(\exists x \in E : P(x)) \text{ et } (\exists x \in E : Q(x))"$$

$$"(\exists x \in E : P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E : Q(x))" \quad \Leftrightarrow \quad "\exists x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

$$"\forall x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad \Rightarrow \quad "(\exists x \in E : P(x)) \text{ et } (\exists x \in E : Q(x))"$$

$$"\forall x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad \Leftrightarrow \quad "(\forall x \in E : P(x)) \text{ et } (\forall x \in E : Q(x))"$$

$$"(\forall x \in E : P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E : Q(x))" \quad \Rightarrow \quad "\forall x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

" $(\forall x \in \mathbb{R} : x = 1) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 1)$ " fausse et " $\forall x \in \mathbb{R} : (x = 1 \text{ ou } x \neq 1)$ " vraie

b)

$P = "\exists x \in \mathbb{R} : (x > 2 \text{ et } x < 1)"$ est fausse

$R = "(\exists x \in \mathbb{R} : x > 2) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R} : x < 1)"$ est vraie : $x = 3$ rend vraie la première et $x = 0$ rend vraie la seconde

c)

$$A = "\forall x \in E \forall y \in F : x \leq y \text{ ou } x + y = 7"$$

$$\overline{A} = "\exists x \in E \exists y \in F : x > y \text{ et } x + y \neq 7"$$

$$B = "\forall x \in E \forall y \in E : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) "$$

$$\overline{B} = "\exists x \in E \exists y \in E : x \neq y \text{ et } f(x) = f(y) "$$

$$C = "\forall y \in F \exists x \in E : y = f(x) "$$

$$C = "\exists y \in F \forall x \in E : y \neq f(x) "$$

$$D = \text{"}\forall \epsilon \in]0; +\infty[: \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow L - \epsilon < U_n < L + \epsilon\text{"}$$

$$\overline{D} = \text{"}\exists \epsilon \in]0; +\infty[: \forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m \text{ et } (U_n \leq L - \epsilon \text{ ou } U_n \geq L + \epsilon)\text{"}$$