

Distance d'un point à une droite en repère orthonormé

Considérons dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une droite D d'équation $a x + b y + c = 0$. Un vecteur normal à cette droite est alors le vecteur :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan et $H(x_H, y_H)$ le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D . Alors on a, par colinéarité :

$$|\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{HM_0}\| \|\vec{n}\|$$

La distance du point M_0 à la droite D est ainsi :

$$d(M_0, D) = \|\overrightarrow{HM_0}\| = \frac{|\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Or :

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} &= a(x_0 - x_H) + b(y_0 - y_H) \\ &= a x_0 + b y_0 - a x_H + b y_H \end{aligned}$$

Mais H est sur la droite D donc :

$$a x_H + b y_H + c = 0$$

d'où :

$$c = -a x_H - b y_H$$

et :

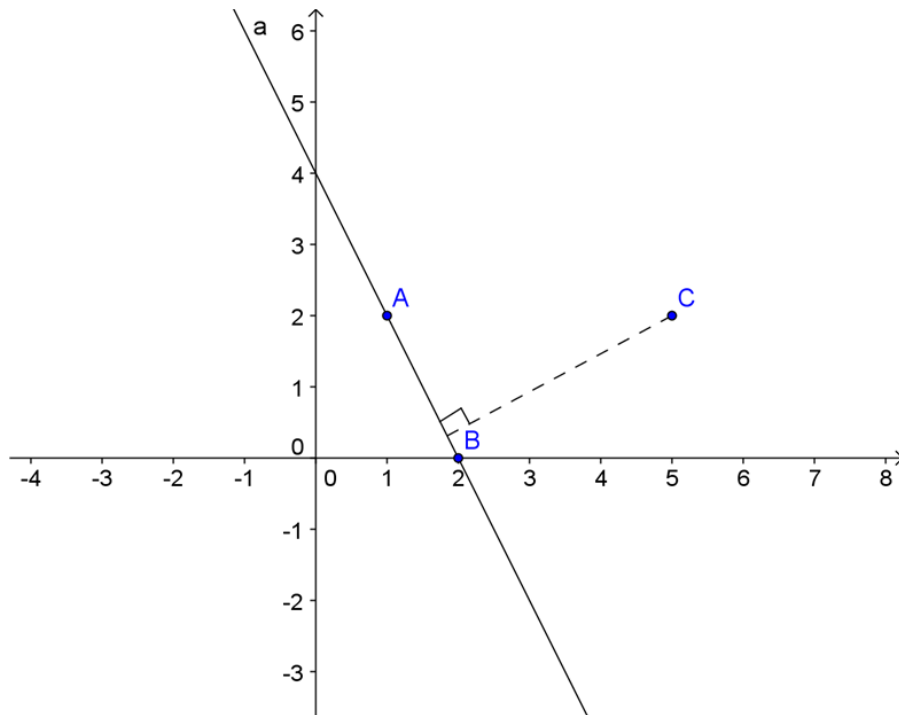
$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = a x_0 + b y_0 + c$$

Finalement la distance s'exprime par :

$d(M_0, D) = \frac{ a x_0 + b y_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
--

Exemple d'application :

Déterminer la distance du point C à la droite (AB)



Solution :

Une équation de la droite (AB) s'obtient en écrivant pour $M(x, y)$:

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(x-1) - 1(y-2) = 0$$

$$-2x - y + 4 = 0$$

$$2x + y - 4 = 0$$

Un vecteur normal est donc :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sa norme est :

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

La distance est donc :

$$d = \frac{|2x_c + y_c - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|2 \times 5 + 2 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$