Equation d'une droite en repère orthonormé

Considérons dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une droite D définie par un point $A(x_A,y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$. Alors, une équation de D formulée en un point $M(x,y)$ du plan est :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

Soit :

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - x_A) = 0$$

$$a\,x + b\,y - a\,x_A - b\,y_A \ = 0$$

Elle est donc de la forme :

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

Réciproquement :

Soit un ensemble D d'équation de la forme

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

avec :

$$\vec{n} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} \neq \vec{0}$$

alors cet ensemble n'est pas vide. En effet, on a :

ou bien $a \neq 0$ et :

$$a\,\left(-\frac{c}{a}\right) + b \times\ 0 + c = 0$$

ou bien $b \neq 0$ et :

$$a \times\ 0\ + b\,\left(-\frac{c}{b}\right) + c = 0$$

Dans les deux cas, il existe un point $A(x_A,y_A)$ tel que :

$$a\,x_A + b\,y_A + c = 0$$

soit :

$$c = -a\,x_A - b\,y_A$$

Ainsi :

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

D est donc la droite passant par le point A et dont un vecteur normal est $\vec{n}$

En résumé :

Les droites d'un plan sont tous les ensembles dont une équation en repère orthonormé est de la forme :

$$\boldsymbol{a\,x + b\,y + c = 0} \quad , \quad \textbf{avec } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$$

Un vecteur normal est alors :

$$\vec{\boldsymbol{n}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$