On rappelle le résultat établi à l'exercice précédent :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

1) **Justifier la convergence et déduire la valeur de :**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)-t}{t^3}\,dt$$

puis celle de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1+\frac{t^2}{2}}{t^4}\,dt$$

2) **On considère de façon plus générale les intégrales impropres :**

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1+\frac{t^2}{2!}+\cdots.-(-1)^p\,\frac{t^{2\,p}}{(2\,p)\,!}}{t^{2\,p+2}}\,dt$$

$$J_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)-t+\frac{t^3}{3!}+\cdots.-(-1)^p\,\frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)\,!}}{t^{2\,p+3}}\,dt$$

a) **Justifier la convergence de ces deux intégrales impropres pour tout entier naturel p**

b) **Etablir une relation entre I_p et J_p puis une relation entre J_p et I_{p+1}**

c) **En déduire I_p et J_p en fonction de p**

<u>Correction :</u>

1) En 0 on a :

$$\frac{\sin(t) - t}{t^2} = \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) - t}{t^2} \sim -\frac{t}{6}$$

Donc l'intégrale converge

Et en $+\infty$:

$$t^{1,5}\ \frac{\sin(t) - t}{t^3} \sim \frac{-1}{t^{0,5}} \to 0$$

Donc l'intégrale converge.

Pour son calcul, on procède à une intégration par partie en posant :

$$u = \frac{1}{t^2} \qquad v' = 1 - cos(t)$$

$$u' = -\frac{2}{t^3} \qquad v = t - sin(t)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ (1 - cos(t))dt = \left[\frac{1}{t^2}(t - sin(t))\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^3}\ (t - sin(t))dt$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{sin(t) - t}{t^3}\right) dt = -\frac{\pi}{2 \times 2} = -\frac{\pi}{4}}$$

Procédons à une nouvelle intégration par partie en posant :

$$u = \frac{1}{t^3} \qquad v' = t - sin(t)$$

$$u' = -\frac{3}{t^4} \qquad v = -1 + \frac{t^2}{2} + cos(t)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}\ (t - sin(t))dt = \left[\frac{1}{t^3}\left(-1 + \frac{t^2}{2} + cos(t)\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3}{t^4}\left(-1 + \frac{t^2}{2} + cos(t)\right)dt$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2}}{t^4}\right)dt = \frac{\pi}{2 \times 3!} = \frac{\pi}{12}}$$

2)

a) Convergence de I_p :

En 0 :

$$\frac{cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p}}{(2\,p)\,!}}{t^{2\,p+2}} = \frac{(-1)^{p+1}\ \frac{t^{2\,p+2}}{(2\,p+2)\,!} + o(t^{2\,p+2})}{t^{2\,p+2}} \sim \frac{(-1)^{p+1}}{(2\,p+2)\,!}$$

L'intégrale converge donc

en $+\infty$:

$$t^{1,5}\ \frac{cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p}}{(2\,p)\,!}}{t^{2\,p+2}} \sim \frac{(-1)^{p+1}}{(2\,p)\,!\ t^{0,5}}$$

L'intégrale converge donc également.

Un travail analogue se fait pour J_p en notant en 0 que :

$$\frac{sin(t) - t + \frac{t^3}{3!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)\,!}}{t^{2\,p+3}} = \frac{(-1)^{p+1}\ \frac{t^{2\,p+3}}{(2\,p+3)\,!} + o(t^{2\,p+3})}{t^{2\,p+3}} \sim \frac{(-1)^{p+1}}{(2\,p+3)\,!}$$

Et en $+\infty$:

$$t^{1,5}\,\frac{sin(t) - t + \frac{t^3}{3!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)\,!}}{t^{2\,p+3}} \sim \frac{(-1)^{p+1}}{(2\,p+1)\,!\ t^{0,5}}$$

b) Procédons pour I_p à une intégration par partie en posant :

$$u = \frac{1}{t^{2\,p+2}} \qquad v' = cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p}}{(2\,p)\,!}$$

$$u' = -\frac{2\,p+2}{t^{2\,p+3}} \qquad v = sin(t) - t + \frac{t^3}{3!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)!}$$

Et :

$$I_p = \left[\frac{1}{t^{2\,p+2}}\left(sin(t) - t + \frac{t^3}{3!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)!}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,p+2}{t^{2\,p+3}}\left(sin(t) - t + \frac{t^3}{3!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)!}\right) dt$$

On en déduit :

$$\boxed{I_p = (2\,p+2)\,J_p}$$

Procédons à une nouvelle intégration par partie en posant :

$$u = \frac{1}{t^{2\,p+3}} \qquad v' = sin(t) - t + \frac{t^3}{3!} + \cdots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+1}}{(2\,p+1)!}$$

$$u' = -\frac{2\,p+3}{t^{2\,p+4}} \qquad v = -\cos(t) + 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \ldots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+2}}{(2\,p+2)!}$$

Alors :

$$J_p = \left[\frac{1}{t^{2\,p+3}}\left(-\cos(t) + 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \ldots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+2}}{(2\,p+2)!}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,p+3}{t^{2\,p+4}}\left(-\cos(t) + 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \ldots . -(-1)^p\ \frac{t^{2\,p+2}}{(2\,p+2)!}\right) dt$$

On en déduit :

$$\boxed{J_p = -(2\,p+3)\,I_{p+1}}$$

Ainsi :

$$\boxed{I_{p+1} = \frac{(-1)}{(2\,p+3)\,(2\,p+2)}\ I_p}$$

Il en résulte :

$$I_p = \frac{(-1)}{(2\,p+1)\,(2\,p)}\,\frac{(-1)}{(2\,(p-1)+1)\,\big(2\,(p-1)\big)}\cdots\frac{(-1)}{(2\,\times 1+1)\,(2\,\times 1)}\,I_0$$

Soit :

$$\boxed{I_p = \frac{(-1)^p}{(2\,p+1)!}\,\frac{\pi}{2}}$$

Puis :

$$\boxed{J_p = \frac{(-1)^p}{(2\,p+2)!}\,\frac{\pi}{2}}$$