Exercice guidé sur une intégrale impropre

1) Etant donnée une fonction f de classe C_1 sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ non réduit à un point. Prouver que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\, sin(n\,x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\, cos(n\,x)\, dx = 0$$

2) Montrer que l'on a pour tout réel $t \neq 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$1 + cos(t) + cos(2\,t) + \cdots + cos(n\,t) = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right) cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3) Prouver que l'égalité précédente reste vraie par passage à la limite aux points $t = 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (On pourra poser $t = x + 2\,k\,\pi$)

4) Justifier la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\, dt$$

5) Linéariser $sin(a)\, cos(b)$ et en déduire que l'on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\, t\right)}{2\, sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Puis :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2\,n+1)\,x)}{sin(x)}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

6) Prouver en utilisant la question 1) que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2\,n+1)\,x)}{sin(x)}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2\,n+1)\,x)}{x}\, dx$$

7) En déduire la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\, dt$$

puis de :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1 - cos(t)}}{\boldsymbol{t^2}} \boldsymbol{dt}$$

enfin de :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{sin^2(x)}}{\boldsymbol{x^2}} \boldsymbol{dx}$$

<u>Correction :</u>

1) Faisons une intégration par partie dans :

$$\int_{a}^{b} f(x)\, sin(n\, x)\, dx$$

en posant :

$$u(x) = f(x),\ \ v'(x) = sin(n\, x)$$

$$u'(x) = f'(x),\ \ v(x) = -\frac{cos(n\, x)}{n}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, sin(n\, x)\, dx = \left[-\frac{cos(n\, x)}{n}\ f(x)\right]_a^b + \int_{a}^{b} \frac{cos(n\, x)}{n}\ f'(x)\, dx$$

$$= \frac{f(a)\ \ cos(n\, a) - f(b)\ \ cos(n\, b)}{n} + \frac{1}{n}\int_{a}^{b} cos(n\, x)\ \ f'(x)\, dx$$

Posons :

$$U_n = \frac{f(a)\ \ cos(n\, a) - f(b)\ \ cos(n\, b)}{n}$$

$$V_n = \frac{1}{n}\int_{a}^{b} cos(n\, x)\ \ f'(x)\, dx$$

$$|U_n|\ \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n}$$

$$|V_n| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

On en déduit que les suites (U_n) et (V_n) tendent vers 0 donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\, sin(n\, x)\, dx = 0$$

Un traitement analogue se fait en remplaçant $sin(n\, x)$ par $cos(n\, x)$

2) On a

$$1 + cos(t) + cos(2\, t) + \cdots + cos(n\, t) = Re\left(1 + e^{i\, t} + e^{2\, i\, t} + \cdots + e^{n\, i\, t}\right)$$

Posons :

$$S_n = 1 + e^{i\, t} + e^{2\, i\, t} + \cdots + e^{n\, i\, t}$$

S_n est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\, t} \neq 1$ pour $t \neq 2\, k\, \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc :

$$S_n = \frac{1 - \left(e^{i\, t}\right)^{n+1}}{1 - e^{i\, t}} = \frac{1 - e^{(n+1)\, i\, t}}{1 - e^{i\, t}}$$

$$= \frac{e^{\, i\,(n+1)\frac{t}{2}}\left(e^{-i\,(n+1)\frac{t}{2}} - e^{\, i\,(n+1)\frac{t}{2}}\right)}{e^{\, i\, \frac{t}{2}}\left(e^{-i\, \frac{t}{2}} - e^{\, i\, \frac{t}{2}}\right)}$$

$$= \frac{e^{\, i\,(n+1)\frac{t}{2}}(-2\, i)\, sin\left(-(n+1)\, \frac{t}{2}\right)}{e^{\, i\, \frac{t}{2}}(-2\, i)\, sin\left(-(n+1)\, \frac{t}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{\, i\, n\frac{t}{2}}\;\; sin\left((n+1)\, \frac{t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

En prenant la partie réelle, il vient :

$$S_n = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\, t}{2}\right)\, cos\left(\frac{n\, t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3) Posons $t = x + 2\, k\, \pi$ alors

$$1 + cos(t) + cos(2\ t) + \cdots + cos(n\ t) = 1 + cos(x) + cos(2\ x) + \cdots + cos(n\ x)$$

et :

$$\lim_{x \to 0}\big(1 + cos(x) + cos(2\ x) + \cdots + cos(n\ x)\big) = n + 1$$

D'autre part :

$$\frac{sin\left(\frac{(n+1)\ t}{2}\right)\ cos\left(\frac{n\ t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\ (x + 2\ k\ \pi)}{2}\right)\ cos\left(\frac{n\ (x + 2\ k\ \pi)}{2}\right)}{sin\left(\frac{x + 2\ k\ \pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)\ k}\ sin\left(\frac{(n+1)\ x}{2}\right)\ (-1)^{n\ k}\ cos\left(\frac{n\ x}{2}\right)}{(-1)^k\ sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{(n+1)\ x}{2}\right)\ cos\left(\frac{n\ x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sim \frac{\frac{(n+1)\ x}{2}}{\frac{x}{2}} \sim (n+1)$$

La formule précédente est donc bien prolongeable par continuité aux points $t = x + 2\ k\ \pi$

4) Convergence de l'intégrale impropre

<u>Convergence de l'intégrale en 0</u>

Nous avons :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

Donc l'intégrale converge en 0

<u>Convergence de l'intégrale en $+\infty$</u>

Considérons la fonction intégrale associée :

$$F(x) = \int_1^x \frac{sin(t)}{t} dt$$

Et faisons une intégration par partie en posant :

$$u(t) = \frac{1}{t} \quad , \qquad v'(t) = sin(t)$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad , \qquad v(t) = -\,cos(t)$$

$$F(x) = \left[\frac{-\,cos\,(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{cos(t)}{t^2}\,dt = cos(1) - \frac{cos\,(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Or :

$$\forall\, t > 0 : \left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc l'intégrale de $\frac{\cos(t)}{t^2}$ est absolument convergente en $+\infty$.

De plus :

$$\forall\, x > 0 : \left|\frac{cos\,(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$$

Donc, par théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{cos\,(x)}{x} = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} F(x) = cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Donc l'intégrale converge en $+\infty$

5) On a :

$$sin(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}\,\big(sin(a+b) + sin(a-b)\big)$$

Nous avons :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* : \int_0^{\pi} cos(k\,t)\,dt = \left[\frac{\sin(k\,t)}{k}\right]_0^{\pi} = 0$$

On en déduit :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,\cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^{\pi} 1\,dt + \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} \cos(k\,t)\,dt = \pi$$

or :

$$\sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,\cos\left(\frac{n\,t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right) + \sin\,\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,\cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{2\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1\,dt$$

D’où finalement :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\,t\right)}{2\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Notons alors que cette relation se met sous la forme :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \frac{\sin\left((2\,n+1)\,\frac{t}{2}\right)}{2\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

soit par changement de variable :

$$t = 2\,x$$

$$dt = 2\,dx$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{\sin(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

6) Considérons la différence des deux intégrales :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{\sin(x)}\,dx - \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{sin(x)} - \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{x} \right) dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x} \right) sin\big((2\,n+1)\,x\big)\ dx$$

Posons :

$$\forall\, x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]\ :\ f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x}$$

$$f(0) = 0$$

Montrons que f est de classe C_1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - sin\,(x)}{x\,sin\,(x)}$$

Un développement limité en 0 donne alors :

$$f(x) = \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\,sin\,(x)} \sim \frac{x^3}{6\,x^2} \sim \frac{x}{6}$$

f est donc continue en 0 donc sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Calculons sa dérivée sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x) = \frac{-\,cos(x)}{sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2\,cos(x) + sin^2(x)}{x^2\,sin^2(x)}$$

$$= \frac{-x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^2\,sin^2(x)}$$

$$= \frac{-x^2 + \frac{x^4}{2} + x^2 - 2\,\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^2\,sin^2(x)} \sim \frac{\frac{x^4}{6}}{x^2\,x^2} \sim \frac{1}{6}$$

Nous avons donc :

f continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{6}$. On en déduit d'après le théorème des accroissements finis que l'on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{6}$$

Donc que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{6}$. De plus f' est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc f est de classe C_1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Le résultat de la question 1) montre alors que la différence des deux intégrales tend vers 0.

7) Faisons un changement de variable en posant :

$$t = (2\,n+1)\,x$$

$$dt = (2\,n+1)\,dx$$

alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{x}dx = \int_0^{\frac{(2\,n+1)\,\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}dt$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{(2\,n+1)\,\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$$

Considérons alors la suite :

$$U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{sin(t)}{t}dt$$

et faisons l'intégration par partie :

$$u(t) = \frac{1}{t} \quad , \qquad v'(t) = sin(t)$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad , \qquad v(t) = 1 - \,cos(t)$$

alors :

$$U_n = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_{\frac{1}{n}}^{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1-cos(t)}{t^2} dt$$

$$= \frac{1-cos(n)}{n} - n\left(1-cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

Or , l'intégrale impropre de $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est absolument convergente en $+\infty$ car la fonction est dominée en valeur absolue par $\frac{1}{t^2}$ et convergente en 0 car elle tend vers $\frac{1}{2}$

et, par développement limité simple :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-cos(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{1-cos(t)}{t^2} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Or, par un nouveau changement de variable, en posant :

$$t = 2\,x$$

$$dt = 2\,dx$$

On a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{2\,sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2\,n}}^{\frac{n}{2}} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx$$

On en déduit , par passage à la limite :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Soit encore par parité :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} dx = \pi}$$