Inégalité de Hölder

Soit deux réels strictement positifs p et q tels que :

$$\mathbf{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$$

Soit deux fonctions réelles f et g intégrables au sens de Riemann et positives ou nulles sur un même intervalle $[a,b]$ et telles que f^p et g^q soient intégrables sur le même intervalle. Alors :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \big(g(x)\big)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

<u>Réponse</u> :

S'il n'existe aucun segment non réduit à un point sur lequel f ou g est strictement positive alors toutes les intégrales de l'inégalité sont nulles. Donc l'inégalité est triviale. Dans l'autre cas :

$$\left(\int_a^b \big(f(x)\big)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} > 0, \qquad \left(\int_a^b \big(g(x)\big)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} > 0$$

Posons alors :

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{\left(\int_a^b \big(f(x)\big)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad g_1(x) = \frac{g(x)}{\left(\int_a^b \big(g(x)\big)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Et appliquons pour tout $x \in [a,b]$ l'inégalité de Young :

$$f_1(x)\,g_1(x) \leq \frac{\big(f_1(x)\big)^p}{p} + \frac{\big(g_1(x)\big)^q}{q}$$

Donc :

$$\int_a^b f_1(x)\,g_1(x)\,dx \leq \frac{1}{p}\int_a^b \big(f_1(x)\big)^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b \big(g_1(x)\big)^q\,dx = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

D'où :

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\left(\int_a^b \big(f(x)\big)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\,\frac{g(x)}{\left(\int_a^b \big(g(x)\big)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\,dx \leq 1$$

Ainsi :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \big(g(x)\big)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$