Intégrales eulériennes de première espèce

<u>Enoncé</u> 1

Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ on considère les intégrales :

$$I(a,b) = \int_0^1 t^a \, (1-t)^b \, dt$$

1) **Pour $b \geq 1$ exprimer $I(a,b)$ en fonction de $I(a+1,b-1)$ et en déduire $I(a,b)$**
2) **Retrouver l'expression précédente de $I(a,b)$ par une deuxième méthode en considérant le polynôme suivant :**

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I(k,n-k) \, x^k$$

<u>Solution</u> :

1)

$$I(a,b) = \int_0^1 t^a \, (1-t)^{b-1} \, (1-t) \, dt$$

On procède à une intégration par partie en posant :

$$u'(t) = t^a \quad v(t) = (1-t)^b$$

$$u(t) = \frac{t^{a+1}}{a+1} \quad v'(t) = -b \, (1-t)^{b-1}$$

Ainsi :

$$I(a,b) = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1} \, (1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1} \, (1-t)^{b-1} \, dt$$

Soit :

$$\boxed{I(a,b) = \frac{b}{a+1} \, I(a+1,b-1)}$$

Ainsi par récurrence :

$$I(a,b) = \frac{b}{a+1} \times \frac{b-1}{a+2} \, I(a+2,b-2) = \frac{b}{a+1} \times \frac{b-1}{a+2} \times \ldots \times \frac{1}{a+b} \, I(a+b,0)$$

Or :

$$I(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\ dt=\frac{1}{a+b+1}$$

Donc :

$$\boxed{I(a,b)=\frac{a\,!\,b\,!}{(a+b+1)\,!}}$$

2) Deuxième méthode

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ I(k,n-k)\ x^k=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ (tx)^k(1-t)^{n-k}\right)dt$$

$$=\int_0^1(t\,x+1-t)^n\ dt=\int_0^1\big((x-1)\,t+1\big)^n\ dt$$

$$=\left[\frac{\big((x-1)\,t+1\big)^{n+1}}{(x-1)\,(n+1)}\right]_0^1=\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)\,(n+1)}$$

$$=\frac{(x-1)\,(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)}{(x-1)\,(n+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\ x^k$$

Par identification des coefficients :

$$\binom{n}{k}\ I(k,n-k)=\frac{1}{n+1}$$

Donc :

$$\frac{n!}{k!\ (n-k)\,!}\ I(k,n-k)=\frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{I(k,n-k)=\frac{k!\ (n-k)!}{(n+1)!}}$$

En posant $k=a, n-k=b$ on en déduit :

$$I(a,b)=\frac{a\,!\,b\,!}{(a+b+1)\,!}$$