Equation différentielle vérifiée par une fonction intégrale

<u>Enoncé</u> 1

Soit f la fonction définie pour $\alpha > 0$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \int_0^1 t^{\alpha}\, sin(t\,x)\, dt}$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur $\mathbb{R}$

<u>Solution</u> :

1) Commençons par le cas $x > 0$ en faisant le changement de variable :

$$t\,x = y$$

$$x\,dt = dy$$

avec le changement de bornes :

$$t = 0 \ \rightarrow y = 0$$

$$t = 1 \ \rightarrow y = x$$

Alors :

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha} \ sin(y)\ \frac{1}{x} dy = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x y^{\alpha}\, sin(y)\, dy$$

Par produit, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \ -\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+2}} \int_0^x y^{\alpha}\, sin(y)\, dy + \frac{1}{x^{\alpha+1}} \times x^{\alpha}\, sin(x)$$

soit

$$f'(x) = \ -\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+2}} \times \ x^{\alpha+1} f(x) + \frac{1}{x^{\alpha+1}} \times x^{\alpha}\, sin(x)$$

D'où :

$$\boxed{x\, f'(x) + (\alpha+1)\, f(x) = sin(x)}$$

Voyons maintenant pour $x < 0$ en notant que que f est impaire. Ainsi :

$$f(x) = -\, f(-x)$$

Donc par composée, f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et :

$$f'(x) = f'(-x)$$

Or :

$$-x\, f'(-x) + (\alpha + 1)\, f(-x) = sin(-x)$$

Donc :

$$-x\, f'(x) - (\alpha + 1)\, f(x) = -sin(x)$$

D'où :

$$\boxed{x\, f'(x) + (\alpha + 1)\, f(x) = sin(x)}$$

Reste à vérifier que l'équation différentielle est vérifiée en $x = 0$. Pour cela prouvons que f est dérivable en 0 en considérant pour $x \neq 0$ le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

Procédons pour cela à une intégration par partie en posant :

$$u'(x) = t^{\alpha} \;\; , \;\; v(x) = sin(t\, x)$$

$$u(x) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \;\; , \;\; v'(x) = x\, cos(t\, x)$$

Alors :

$$f(x) = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\, sin(t\, x)\right]_0^1 - x \int_0^1 \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\, cos(t\, x)\, dt$$

Donc :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{sin(x)}{x\, (\alpha + 1)} - \int_0^1 \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\, cos(t\, x)\, dt$$

A nouveau, posons :

$$u'(x) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \;\; , \;\; v(x) = cos(t\, x)$$

$$u(x) = \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha + 1)\, (\alpha + 2)} \;\; , \;\; v'(x) = -\, x\, sin(t\, x)$$

Et :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{sin(x)}{x\ (\alpha+1)} - \left[\frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}\ cos(t\ x)\right]_0^1 - x\int_0^1 \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}\ sin(t\ x)\ dt$$

$$= \frac{sin(x)}{x\ (\alpha+1)} - \frac{cos(x)}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)} - x\int_0^1 \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}\ sin(t\ x)\ dt$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x\ (\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)} = \frac{1}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}$$

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}\ sin(t\ x)\ dt\right| \le \int_0^1 \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}\ \ dt = \frac{1}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)(\alpha+3)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} x\int_0^1 \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)}\ sin(t\ x)\ dt = 0$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)\ (\alpha+2)} = \frac{1}{\alpha+2}$$

Donc f est dérivable en 0 et :

$$f'(0) = \frac{1}{\alpha+2}$$

Or :

$$f(0) = 0$$

L'équation différentielle est donc bien vérifiée en 0 et donc sur $\mathbb{R}$