Calculs d'espérances et de variances

<u>Enoncé</u> :

Soient n boites numérotées de 1 à n, telles que dans la boite de numéro k il y ait k boules indiscernables au toucher. On choisit une boite au hasard puis une boule dans cette boite.

On note X, la variable aléatoire qui prend la valeur du numéro de la boite choisie et Y, celle qui prend le numéro de la boule choisie dans la boite.

La but de l'exercice est de déterminer les espérances et variances de X et Y.

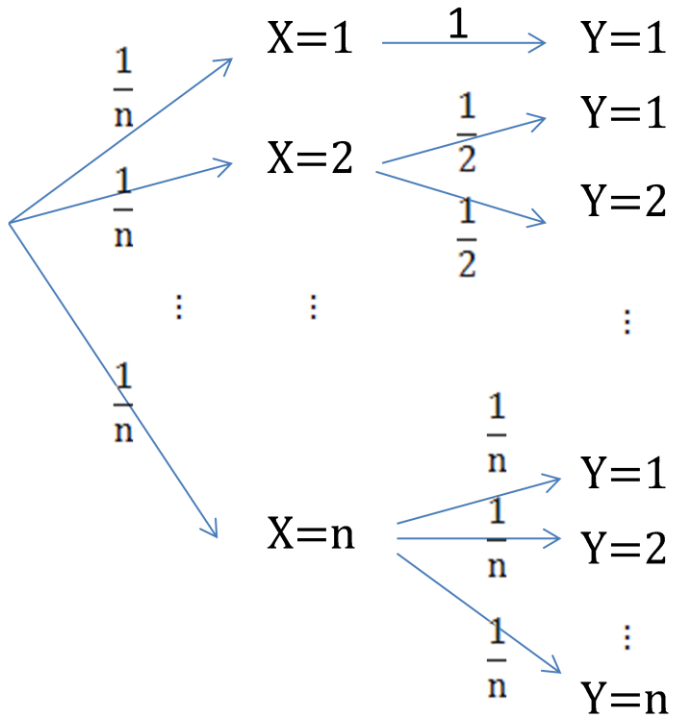
<u>Résolution</u> :

Nous allons résoudre ce problème en suivant le plan logique suivant :

- Arbre de probabilités
- Tableau de la loi conjointe
- Loi marginale de X
- Loi marginale de Y
- Espérance et variance de X
- Espérance et variance de Y

C'est parti, en voiture s'il vous plaît !

I Arbre de probabilités :



II Tableau de la loi conjointe :

X\Y	1	2	…	j	…	…	n
1	$\frac{1}{n}$						
2	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$			⋮		
3	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	…			
⋮	⋮	…	…				
i	$\frac{1}{in}$	$\frac{1}{in}$	…	…	$\frac{1}{in}$		
⋮	⋮	…	…	…	…		
n	$\frac{1}{nn}$	$\frac{1}{nn}$	…	…	…	…	$\frac{1}{nn}$

Comme nous le conseillons souvent, nous avons relevé la diagonale (i = j) avec une couleur.

III Loi marginale de X :

Pour tout entier $i > 0$, nous avons :

$$\boxed{P(X = i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{i\,n} = \frac{1}{i\,n} \times i = \frac{1}{n}}$$

Facile donc ! Ca promet donc un calcul d'espérance et de variance facile également.

IV Loi marginale de Y :

Pour tout entier $j > 0$, nous avons :

$$\boxed{P(Y = j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i\,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}$$

Et là, ca coince, pas de formule simple ! Rappelons tout de même pour les élèves cultivés que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \mathrm{Ln}(n) = \ C \approx 0{,}51 \text{ (constante d'Euler)}$$

Donc peu d'espoir de trouver une forme plus compacte dans l'expression de $P(Y = j)$. Si Euler n'a pas trouvé !!!

En revanche, nous allons voir que cela n'empêche pas de trouver une expression très simple pour l'espérance et la variance.

V Espérance et variance de X :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} i\,P(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i \;= \frac{1}{n} \times \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2}}$$

Les doigts dans le nez !! Enfin… Non, ca ne se fait plus depuis qu'on se rase sous les bras.

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2\,P(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 \;= \frac{1}{n} \times \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2\,n^2 + 3\,n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2\,n + 1}{4}$$

$$= \frac{4\,n^2 + 6\,n + 2 - 3\,n^2 - 6\,n - 3}{12}$$

Finalement :

$$\boxed{V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}}$$

VI Espérance et variance de Y :

C'est là que ca semble se gâter. Mais non, mais non, un peu de pugnacité voyons ! « L'œil qui regarde bien » selon la formule de Cyrano de Bergerac. Allez revoyez votre tableau de loi conjointe et concentrez vous dessus, ca devrait faire « tilt ».

J'en vois qui donnent leur langue au chat ! Alors comme je suis d'un naturel empathique, je vous livre la solution.

$$\boxed{E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\, P(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} \left(j\, \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}}$$

C'est là que regarder le tableau avec soin va nous aider. Nous allons d'abord le reproduire, mais en faisant apparaître dans la cellule de la ligne i et de la colonne j le rapport j/i.

X\Y	1	2	...	j	...	...	n
1	$\frac{1}{1}$						
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$			$\vdots$		
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	...			
$\vdots$	$\vdots$	...	...				
i	$\frac{1}{i}$	$\frac{2}{i}$	...	...	$\frac{i}{i}$		
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...		
n	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	...	...	...	...	$\frac{n}{n}$

Calculer l'espérance de Y revient à faire la somme des cellules de ce tableau. Or dans l'expression précédente, la somme se fait en colonnes, ce qui ne fait pas apparaître de formule compacte. En revanche, si cette somme est effectuée en ligne, c'est le cas. En effet, on a alors :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}$$

Notez que les indices i et j se sont permutés dans les sommations, mais les bornes ont changé également. Un conseil, faites ce genre de transformation en regardant le tableau, vous y lirez les bornes facilement.

Ainsi :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \times \frac{i\,(i+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\,n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

$$= \frac{1}{2\,n} \times \frac{(2+n+1)}{2} \times n$$

Soit finalement :

$$\boxed{E(Y) = \frac{n+3}{4}}$$

De même :

$$E(Y^2) = \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\ \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j^2}{i}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j^2}{i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \times \frac{i\,(i+1)\,(2\,i+1)}{6}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)\,(2\,i+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2\,i^2+3\,i+1}{6}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2\,i^2+3\,i+1}{6}$$

$$=\frac{1}{3\,n}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{1}{2\,n}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{1}{6\,n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$=\frac{1}{3\,n}\times\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}+\frac{1}{2\,n}\times\frac{n\,(n+1)}{2}+\frac{1}{6\,n}\times n$$

$$=\frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{18}+\frac{n+1}{4}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{2\,n^2+3\,n+1}{18}+\frac{n+1}{4}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{4\,n^2+6\,n+2}{36}+\frac{9\,n+9}{36}+\frac{6}{6}$$

$$=\frac{4\,n^2+15\,n+17}{36}$$

On en déduit :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)$$

$$=\frac{4\,n^2+15\,n+17}{36}-\frac{(n+3)^2}{16}$$

$$=\frac{4\,n^2+15\,n+17}{36}-\frac{n^2+6\,n+9}{16}$$

$$=\frac{4\,n^2+15\,n+17}{36}-\frac{n^2+6\,n+9}{16}$$

$$= \frac{16\ n^2 + 60\ n + 68}{144} - \frac{9\ n^2 + 54\ n + 81}{144}$$

Finalement :

$$\boxed{V(Y) = \frac{7\ n^2 + 6\ n - 13}{144}}$$

Ouf ! C'est pas très beau, encore que ! On s'attend souvent à des expressions simples. C'est la faute à l'école qui s'arrange pour que ce soit souvent le cas.

En revanche il est important de contrôler son résultat dans un cas simple $(n = 1)$ par exemple :

La formule donne alors : $V(Y) = 0$

Recalculons là directement.

Si $n = 1$, il n'y a qu'une boite et une boule dedans, X et Y n'ont que la seule valeur 1, leur espérance est donc 1 et leur variance est nulle, ce qui nous rassure sur nos résultats.