<u>Enoncé</u> :

1) <u>Préliminaire</u> :

On définit une fonction puissance à exposant complexe $a + i\, b$ pour $x \in \,]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^{a+i\,b} = e^{(a+i\,b)\,Ln(x)} = e^{a\,Ln(x)}\left(cos(b\,Ln(x)) + i\,sin(b\,Ln(x))\right)$$

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$f'(x) = (a + i\,b)\,x^{a-1+i\,b}$$

2) <u>Application (oral Polytechnique 1982)</u> :

Soit $k \in \,]0, +\infty[$. Déterminer les fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \,]0, +\infty[\, : f'(x) = f\left(\frac{k}{x}\right) \qquad (1)$$

<u>Solution</u> :

1) f a une partie réelle et une partie imaginaire qui sont dérivables sur $]0, +\infty[$ par produits et compositions et :

$$f(x) =$$

$$\frac{a}{x}\,e^{a\,Ln(x)}\,\Big(cos\big(b\,Ln(x)\big) + i\,sin\big(b\,Ln(x)\big)\Big) + e^{a\,Ln(x)}\left(-\frac{b}{x}\,sin\big(b\,Ln(x)\big) + i\,\frac{b}{x}\,cos\big(b\,Ln(x)\big)\right)$$

$$= \frac{e^{a\,Ln(x)}}{x}\,\Big((a + i\,b)\,cos\big(b\,Ln(x)\big) + (a\,i + \,b)\,sin\big(b\,Ln(x)\big)\Big)$$

$$= \frac{e^{a\,Ln(x)}}{e^{\,Ln(x)}}\,\Big((a + i\,b)\,cos\big(b\,Ln(x)\big) + i\,(a + i\,b)\,sin\big(b\,Ln(x)\big)\Big)$$

$$= (a + i\,b)\,e^{(a-1)\,Ln(x)}\,\Big(\,cos\big(b\,Ln(x)\big) + i\,sin\big(b\,Ln(x)\big)\Big)$$

$$= (a + i\,b)\,x^{a-1+i\,b}$$

2) Soit f une fonction solution de l'équation proposée alors en dérivant les deux membres de l'équation on en déduit que f vérifie sur $]0, +\infty[$:

$$f''(x) = -\frac{k}{x^2}\,f'\left(\frac{k}{x}\right) = -\frac{k}{x^2}\,f(x)$$

Donc f est solution sur $]0, +\infty[$ de l' équation différentielle du second ordre :

$$y'' = -\frac{k}{x^2}\,y \quad (2)$$

Résolvons cette dernière équation en cherchant une solution particulière (éventuellement complexe) sous la forme :

$$f(x) = x^{\alpha}, \qquad \alpha \neq 0, \qquad \alpha \neq 1$$

Soit :

$$f''(x) = \alpha\,(\alpha - 1)\,x^{\alpha-2}$$

La condition sur α est donc :

$$\alpha\,(\alpha - 1) = -k$$

Soit :

$$\alpha^2 - \alpha + k = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = 1 - 4\,k$$

Distinguons deux cas :

<u>1er cas :</u> $\Delta = 0 \Leftrightarrow\; k = 1/4$

L'équation a une racine double :

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

La fonction $f_P(x) = \sqrt{x}$ est donc solution de l'équation différentielle (2) sur $]0, +\infty[$. Il nous faut en trouver une autre f qui soit indépendante en utilisant le wronskien de cette solution et de la solution particulière trouvée :

$$W(x) = \begin{vmatrix} f & \sqrt{x} \\ f' & \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}} \end{vmatrix} = \frac{f}{2\,\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,f'$$

Nous avons vu dans un autre exercice que le wronskien obéit à l'équation différentielle du premier ordre :

$$W'(x) = a(x)\,W(x)$$

où $a(x)$ est le facteur apparaissant dans l'équation mise sous forme :

$$y'' = a(x)\,y' + b(x)y$$

Ici, $a(x)$ est identiquement nul sur $]0, +\infty[$ et ainsi :

$$W'(x) = 0$$

Et donc le wronskien est constant sur $]0, +\infty[$. Comme nous ne cherchons qu'une solution, nous pouvons prendre comme valeur -1 pour cette constante et résoudre :

$$\frac{f}{2\,\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,f' = -1$$

Soit de façon normalisée :

$$f' = \frac{1}{2\,x}\,f + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

En notant que l'équation homogène associée admet pour solutions les fonctions $x \to c\,\sqrt{x}, c \in \mathbb{R}$, nous pouvons chercher une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation de la constante sous la forme :

$$f(x) = c(x)\sqrt{x}, \quad f'(x) = c'(x)\sqrt{x} + \frac{c(x)}{2\sqrt{x}}$$

Soit :

$$c'(x)\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Donc :

$$c'(x) = \frac{1}{x}$$

D'où une autre solution :

$$f(x) = \sqrt{x}\ \ Ln(x)$$

qui est indépendante de la première puisque le wronskien de f avec celle-ci est égal à -1 :

Le couple $\left(\sqrt{x}, \sqrt{x}\ \ Ln(x)\right)$ est donc une base de l'espace vectoriel des solutions réelles qui est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda\sqrt{x} + \mu\sqrt{x}\ \ Ln(x), \quad (\lambda\,,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Reste à déterminer, parmi ces solutions, celles qui vérifient l'équation fonctionnelle initiale (1). Pour cela, dérivons l'égalité précédente :

$$f'(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} + \mu\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ Ln(x) + \sqrt{x}\ \frac{1}{x}\right) = \frac{(\lambda + 2\,\mu) + \ \mu\, Ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

et :

$$f\left(\frac{k}{x}\right) = f\left(\frac{1}{4\,x}\right) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} + \mu\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (-Ln(x) - Ln(4)) = \frac{(\lambda - \ \mu\, Ln(4)) - \ \mu\, Ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

Nous obtenons ainsi par identification les conditions :

$$\begin{cases} \lambda + 2\,\mu = \lambda - \ \mu\, Ln(4) \\ \mu = -\,\mu \end{cases} \Leftrightarrow \ \mu = 0$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $f(x) = \lambda\sqrt{x}\,, \lambda \in \mathbb{R}$

2ème cas : $\Delta > 0 \Leftrightarrow\ 0 < k < 1/4$

L'équation a deux racines distinctes qui sont :

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,k}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\,k}}{2}$$

Elles vérifient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1\, \alpha_2 = k$$

Le couple de fonctions $(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2})$ est donc une base de l'espace vectoriel des solutions réelles de l'équation différentielle (2) et ces solutions réelles ont donc pour forme :

$$f(x) = \lambda\, x^{\alpha_1} + \mu\, x^{\alpha_2}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

où :

$$f'(x) = \lambda\, \alpha_1\, x^{\alpha_1 - 1} + \mu\, \alpha_2\, x^{\alpha_2 - 1} = \lambda\, \alpha_1\, x^{-\alpha_2} + \mu\, \alpha_2\, x^{-\alpha_1}$$

Et :

$$f\left(\frac{k}{x}\right) = \lambda\, \frac{k^{\alpha_1}}{x^{\alpha_1}} + \mu\, \frac{k^{\alpha_2}}{x^{\alpha_2}} = \lambda\, k^{\alpha_1}\, x^{-\alpha_1} + \mu\, k^{\alpha_2}\, x^{-\alpha_2}$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme précédente et telles que :

$$\begin{cases} \lambda\, \alpha_1 = \mu\, k^{\alpha_2} \\ \mu\, \alpha_2 = \lambda\, k^{\alpha_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\, \alpha_1 = \mu\, k^{\alpha_2} \\ \mu\, \dfrac{k}{\alpha_1} = \lambda\, k^{\alpha_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\, \alpha_1 = \mu\, k^{\alpha_2} \\ \mu\, k^{1-\alpha_1} = \lambda\, \alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\, \alpha_1 = \mu\, k^{\alpha_2} \\ \mu\, k^{\alpha_2} = \lambda\, \alpha_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mu = \lambda\, \alpha_1 k^{-\alpha_2}$$

Donc de la forme :

$$f(x) = \lambda\, (x^{\alpha_1} + \alpha_1\, k^{-\alpha_2}\, x^{\alpha_2}) \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 1

.3ème cas : $\Delta < 0 \Leftrightarrow k > 1/4$

L'équation a deux racines distinctes qui sont :

$$\alpha_1 = \frac{1 - i\sqrt{4\,k - 1}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + i\sqrt{4\,k - 1}}{2}$$

On pose :

$$\omega = \frac{\sqrt{4\,k - 1}}{2} = \sqrt{k - \frac{1}{4}}$$

Alors :

$$x^{\alpha_1} = \sqrt{x}\,\big(cos(\omega\, Ln(x)) - i\, sin(\omega\, Ln(x))\big)$$

$$x^{\alpha_2} = \sqrt{x}\,\big(cos(\omega\, Ln(x)) + i\, sin(\omega\, Ln(x))\big)$$

Le couple de fonctions $(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2})$ est donc une base de l'espace vectoriel des solutions complexes de l'équation différentielle (2) et le couple formé par leurs parties réelles, une base de l'espace vectoriel des solutions réelles qui ont donc pour forme :

$$f(x) = \lambda \sqrt{x} \cos(\omega Ln(x)) + \mu \sqrt{x} \sin(\omega Ln(x)) , \quad (\lambda , \mu) \in \mathbb{R}^2$$

où :

$$f'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\lambda \cos(\omega Ln(x)) + \mu \sin(\omega Ln(x))\right) + \frac{\sqrt{x}}{x} \left(-\lambda \omega \sin(\omega Ln(x)) + \mu \omega \cos(\omega Ln(x))\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left(\frac{\lambda}{2} + \mu \omega\right) \cos(\omega Ln(x)) + \left(\frac{\mu}{2} - \lambda \omega\right) \sin(\omega Ln(x))\right)$$

Et :

$$f\left(\frac{k}{x}\right) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(\omega \left(Ln(k) - Ln(x)\right)\right) + \mu \sin\left(\omega \left(Ln(k) - Ln(x)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x}} \Big(\left(\lambda \cos(\omega Ln(k)) + \mu \sin(\omega Ln(k))\right) \cos(\omega Ln(x)) + \left(\lambda \sin(\omega Ln(k)) - \mu \cos(\omega Ln(k))\right) \sin(\omega Ln(x))\Big)$$

Les solutions de l'équation initiale (1) sont donc les fonctions de la forme précédente et telles que :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} + \mu \omega = \sqrt{k} \left(\lambda \cos\left(\omega Ln(k)\right) + \mu \sin\left(\omega Ln(k)\right)\right) \\ \frac{\mu}{2} - \lambda \omega = \sqrt{k} \left(\lambda \sin\left(\omega Ln(k)\right) - \mu \cos\left(\omega Ln(k)\right)\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{k} \cos\left(\omega Ln(k)\right) - \frac{1}{2}\right) \lambda + \left(\sqrt{k} \sin\left(\omega Ln(k)\right) - \omega\right) \mu = 0 \\ \left(\sqrt{k} \sin\left(\omega Ln(k)\right) + \omega\right) \lambda - \left(\sqrt{k} \cos\left(\omega Ln(k)\right) + \frac{1}{2}\right) \mu = 0 \end{cases}$$

Calculons le déterminant de ce système. :

$$D = -\left(k \cos^2\left(\omega Ln(k)\right) - \frac{1}{4}\right) - \left(k \sin^2\left(\omega Ln(k)\right) - \omega^2\right) = -k + \frac{1}{4} + \omega^2 = 0$$

Le système équivaut donc à une de ses deux équations. Comme tous les coefficients de ce système ne peuvent être tous nuls, on en déduit qu'un des coefficients λ ou μ s'exprime en fonction de l'autre et donc que les solutions réelles forment un espace vectoriel de dimension 1.