

Problème 2 : balle de golf qui roule (8 points) :

Ce problème vise à étudier le mouvement d'une balle de golf à qui on veut faire exécuter un 360° comme sur la photo

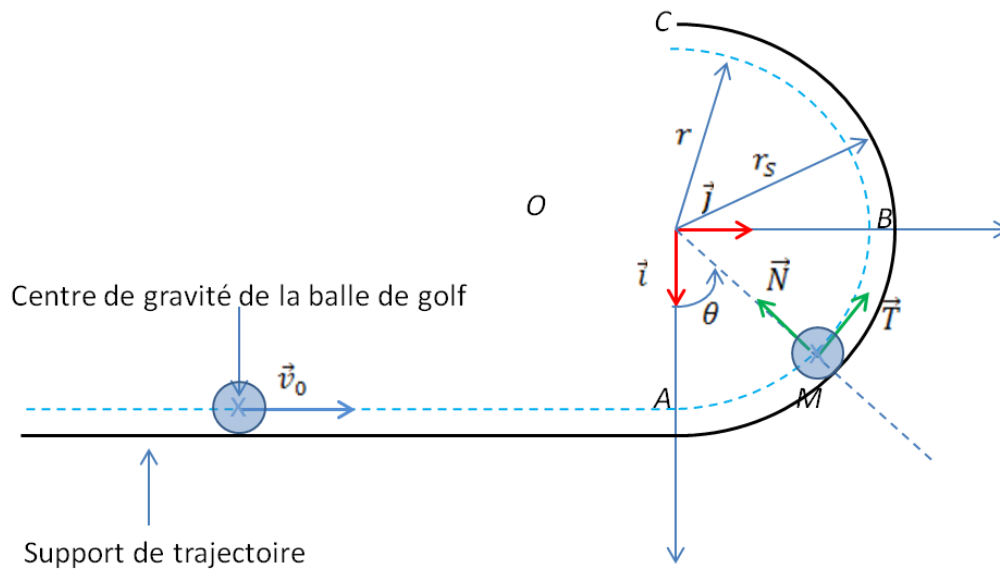


Nous allons cependant quelque peu simplifier l'étude de cette façon :

Une balle de golf de masse m et de rayon r_b roule sans frottements avec une vitesse v_0 sur un plan horizontal et parvient dans une zone où son support est circulaire de rayon r_s

Le mouvement du centre de gravité de la balle est étudié à partir de l'entrée de cette dernière dans la zone circulaire. Le centre de gravité est alors au point A (voir schéma qui suit). Le référentiel terrestre d'étude est supposé galiléen et le plan de trajectoire est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, O étant le centre du cercle défini par le support sur lequel la balle roule, $\vec{i}$ un vecteur vertical dirigé vers le bas et $\vec{j}$ un vecteur horizontal, tels que définis sur le schéma.

Tant que la balle reste en contact avec le support, elle a une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r = r_s - r_b$.



Préliminaire : Mouvement circulaire et repère de Frenet

On considère un mouvement sur la portion de cercle précédente. On repère la position du centre de gravité M de la bille par ses coordonnées polaires (r, θ) , $r = OM$, $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

- 1) Exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) du point M en fonction de ses coordonnées polaires (r, θ)
- 2) En déduire les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ puis celles du vecteur-accélération $\vec{a}$ en fonction de θ et ses dérivées temporelles qu'on notera pour simplifier :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} ; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

- 3) Déterminer, en fonction de (r, θ) les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ du vecteur unitaire tangent $\vec{T}$ à la trajectoire au point M et de même sens que $\vec{v}$
- 4) Déterminer, en fonction de (r, θ) , les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ du vecteur unitaire $\vec{N}$ normal à la trajectoire et pointant dans la concavité (donc directement orthogonal à $\vec{T}$)
- 5) En déduire une expression du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$. On notera v la composante de $\vec{v}$ sur $\vec{T}$ et on mettra en évidence les composantes d'accélération tangentielle et d'accélération normale en faisant apparaître v et non pas θ .

Partie I : Etude de la phase de montée

On se place ici dans la phase où la balle reste en contact avec son support circulaire.

- 1) Faire le bilan des forces extérieures s'appliquant à la balle et les représenter sur un schéma (on négligera la résistance de l'air et les frottements du support)
- 2) Ecrire la seconde loi de Newton.
- 3) Déterminer les composantes des forces extérieures dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$. Pour le poids, on pourra commencer par déterminer les composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et se servir de produits scalaires.
- 4) En appliquant la seconde loi de Newton, déterminer la composante R sur $\vec{N}$ de la réaction $\vec{R}$ du support en fonction de r, θ, m, g, v
- 5) En prenant comme référence nulle de l'énergie potentielle de pesanteur le point A , exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle au point M de paramètre θ
- 6) En notant la conservation de l'énergie mécanique (énergie cinétique + énergie potentielle de pesanteur) déduire la valeur de V^2 en fonction de θ et des autres paramètres, puis montrer que l'on a :

$$R = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 2g + 3g \cos(\theta) \right)$$

Partie II : Etude du type de trajectoire

On s'intéresse ici à la condition pour que la balle quitte le guide avant que son centre de gravité n'atteigne le point C qui est le point le plus haut et, dans ce cas, pour quelle valeur de θ . La condition pour que la balle reste sur le guide est alors : $R > 0$

- 1) Vérifier que la valeur de R est strictement positive pour $\theta = 0$ c'est-à-dire M en A
- 2) En notant que R est une fonction décroissante de θ , déterminer la valeur maximale de la vitesse v_0 pour que la balle ne quitte pas le support mais s'arrête et reparte en arrière, en écrivant que la vitesse s'annule en B donc pour $\theta = 90^\circ$
- 3) Déterminer la vitesse minimale pour que la balle ne quitte le support qu'en C donc fasse un 360° en écrivant que la réaction s'annule en $\theta = 180^\circ$
- 4) En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse v_0 pour que la balle quitte son support avant le point C ? Quel est alors la nature de sa trajectoire, la représenter qualitativement sur le schéma. Déterminer alors l'angle θ pour lequel la balle quitte son support.
- 5) Le fait de quitter son support avant le point C empêche-t-il la balle de faire un 360° . Argumenter sans faire de calculs.

Corrigé

Preliminaire

- 1) Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

- 2) Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = -r \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y} = r \dot{\theta} \cos(\theta) \end{cases}$$

et celles du vecteur accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -r \ddot{\theta} \sin(\theta) - r \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\ \ddot{y} = r \ddot{\theta} \cos(\theta) - r \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{cases}$$

- 3) Vecteur tangent de la base de Frenet

$$\vec{T} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- 4) Vecteur normal de la base de Frenet

$$\vec{N} \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

- 5) Vecteur vitesse dans la base de Frenet

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{T} = v \vec{T}$$

Vecteur accélération dans la base de Frenet

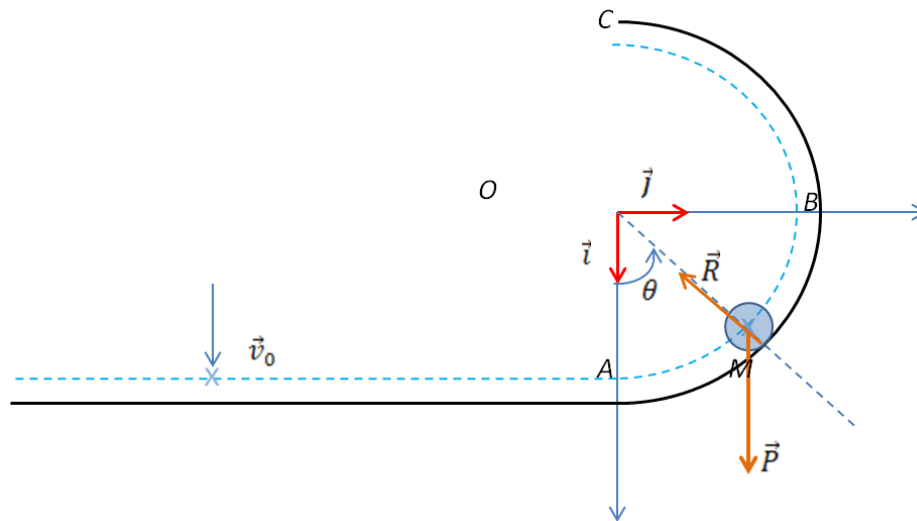
$$\vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{T} + r \dot{\theta}^2 \vec{N}$$

$$a_T = r \ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = r \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r}$$

Partie I

- 1)



$$2) \vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$$

3) Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on a :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\vec{P} \cdot \vec{T} = -mg \sin(\theta)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{N} = -mg \cos(\theta)$$

D'où :

$$\vec{P} = -mg \sin(\theta) \vec{T} - mg \cos(\theta) \vec{N}$$

$$\vec{R} = R \vec{N}$$

4)

$$m \vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{T} + m \frac{v^2}{r} \vec{N}$$

La loi de Newton conduit donc à :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \sin(\theta) \\ m \frac{v^2}{r} = R - mg \cos(\theta) \end{cases}$$

On en déduit :

$$R = m \left(\frac{v^2}{r} + g \cos(\theta) \right)$$

1) Energie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Energie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = m g r (1 - \cos(\theta))$$

2) Conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g r (1 - \cos(\theta)) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

D'où :

$$v^2 = v_0^2 - 2 g r (1 - \cos(\theta))$$

$$R = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 2 g + 3 g \cos(\theta) \right)$$

Partie II

1)

$$R(0) = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 2 g + 3 g \right) = m \left(\frac{v_0^2}{r} + g \right) > 0$$

2)

$$R(90^\circ) = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 2 g + 0 \right) = 0$$

$$v_0^2 = 2 g r$$

$$v_0 = \sqrt{2 g r}$$

3)

$$R(180^\circ) = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 2g - 3g \right) = 0$$

$$v_0^2 = 5gr$$

$$v_0 = \sqrt{5gr}$$

4)

$$\sqrt{2gr} < v_0 < \sqrt{5gr}$$

$$R(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{r} - 2g + 3g \cos(\theta) = 0$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gr}$$

5) Non, la balle a un mouvement parabolique en quittant son support et retombe sur la partie interne du support.