Fonctions classe $\mathcal{C}_\infty$ à support compact

Partie 1 :

1) On considère la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \; si \; x \in [0, +\infty[, 0 \; si \; x \in]-\infty, 0[$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais non de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$

2) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$f(x) = x^n \; si \; x \in [0, +\infty[, 0 \; si \; x \in]-\infty, 0[$$

Déterminer la classe de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction définie par :

$$f(x) = P(x) \; si \; x \in [b, +\infty[, Q(x) \; si \; x \in]-\infty, b[$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $P = Q$

Partie 2 :

On définit le support d'une fonction réelle à variable réelle par :

$$S(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \; f(x) \neq 0\}}$$

On dit qu'une fonction est à support compact si $S(f)$ est compacte.

Comme $S(f)$ est une partie fermée et que les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées, on a donc la caractérisation suivante :

$$S(f) \; compacte \; \Leftrightarrow \; S(f) \; bornée \Leftrightarrow \exists \; b \in]0, +\infty[\; : \; f = 0 \; sur \; \mathbb{R} \backslash [-b, b]$$

4) On considère la fonction définie par :

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{1-x^2}} \; si \; x \in]-1,1[, 0 \; si \; x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

b) on définit

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$\delta_n(x) = n \, \psi(n \, x)$$

Justifier que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$, déterminer le support de δ_n ainsi que sa classe et calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) \, dt$$

Tracer qualitativement, $\delta_1, \delta_2, \delta_{10}$.

<u>Partie 3</u> :

On note $\mathfrak{D}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact.

5) Montrer que $\mathfrak{D}$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6) Montrer que $\mathfrak{D}$ est stable pour le produit des fonctions, et pour la dérivation, à savoir, si $f \in \mathfrak{D}$ alors $f' \in \mathfrak{D}$

7) On définit le produit de convolution $h = f * g$ de deux fonctions f et g de $\mathfrak{D}$ par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

a) Montrer que h est bien défini et appartient à $\mathfrak{D}$ et déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $h^{(p)}(x)$

b) Montrer que : $f * g = g * f$

8) Montrer que la suite de fonctions $(f * \delta_n)$ tend simplement vers f sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur toute intervalle fermé borné.

<u>Correction</u> :

Partie 1

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et même de classe $\mathcal{C}_\infty$ et :

$$f'(x) = 0 \; sur \;]-\infty, 0[, f'(x) = 2\,x \; sur \;]0, +\infty[$$

Reste à étudier en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ puis f' est continue en 0. Donc f est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$.

2) f est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \; f^{(k)}(x) = 0 \;\; sur \;]-\infty, 0[$$

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!] : \quad f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \; sur \;]0, +\infty[$$

$$\forall\, k > n : \quad f^{(k)}(x) = 0 \; sur \;]0, +\infty[$$

On montre par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}_p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$.

Initialisation : pour $p = 0$, f est de classe $\mathcal{C}_0$ sur $\mathbb{R}$

Hérédité : On suppose que f est de classe $\mathcal{C}_p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in [\![0, n-2]\!]$. Alors

$$f^{(p)}(x) = n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} \; sur \;]0,+\infty[$$

Donc $f^{(p)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$f^{(p+1)}(x) = n(n-1)\dots(n-p+1)\,(n-p)\,x^{n-p-1}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(p+1)}(x) = \lim_{x\to 0^-} f^{(p+1)}(x) = 0$$

$f^{(p)}$ est donc dérivable en 0 et $f^{(p+1)}(0) = 0$. D'où $f^{(p+1)}$ est continue en 0 et donc continue sur $\mathbb{R}$.

f est donc de classe $\mathcal{C}_{p+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}_{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$f^{(n)}(x) = n! \; sur \;]0,+\infty[, 0 \; sur \;]-\infty,0[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = n!$$

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$$

Donc $f^{(n-1)}$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et :

$$f_d^{(n)}(x) = n!$$

$$f_g^{(n)}(x) = 0$$

Donc $f^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0.

f est donc de classe $\mathcal{C}_{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

3) Supposons f de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$. Posons :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i(x-b)^i, \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i(x-b)^i, a_m \neq 0, b_n \neq 0$$

Supposons par l'absurde $m < n$ alors :

$$P^{(m)}(b) = a_m\, m! \neq 0, \qquad Q^{(m)}(b) = 0$$

Ce qui est absurde. Le même raisonnement vaut en supposant $m > n$, donc $m = n$.

On a alors :

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!] : \; P^{(k)}(b) = Q^{(k)}(b)$$

Donc :

$$a_k\, k! = b_k\, k!$$

Soit :

$$a_k = b_k$$

D'où $P = Q$.

La réciproque est triviale.

Partie2

4) Montrons d'abord que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

φ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Comme φ est paire, il suffira d'étudier la régularité de la fonction en 1.

Posons :

$$t = \frac{1}{1-x^2}$$

Alors :

$$\lim_{x\to 1^-} e^{-\frac{x^2}{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1-x^2-1}{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} e^{1-\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{t\to+\infty} e^{1-t} = 0 = \varphi(0)$$

Donc φ est continue en 1, donc par parité en -1 et donc sur $\mathbb{R}$.

Montrons alors par récurrence que φ est de classe $\mathcal{C}_n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que :

$$\exists\, P_n \in \mathbb{R}[X] :\ \forall\, x \in\,]-1,1[\ :\ \varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2^n}} e^{1-\frac{1}{1-x^2}}$$

L'initialisation a été faite pour $n = 0$. Supposons alors que φ soit de classe $\mathcal{C}_n$ sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que :

$$\exists\, P_n \in \mathbb{R}[X] :\ \forall\, x \in\,]-1,1[\ :\ \varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2^n}} e^{1-\frac{1}{1-x^2}}$$

Alors en dérivant sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(x) = {} & \frac{P'_n(x)\,(1-x^2)^{2^n} - P_n(x)\,2^n\,(-2\,x)\,(1-x^2)^{2^n-1}}{((1-x^2)^{2^n})^2} e^{1-\frac{1}{1-x^2}} \\ & + \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2^n}}\left(\frac{-2\,x}{(1-x^2)^2}\right) e^{1-\frac{1}{1-x^2}}\end{aligned}$$

Soit :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{2^{n+1}}} e^{1-\frac{1}{1-x^2}}$$

Ainsi :

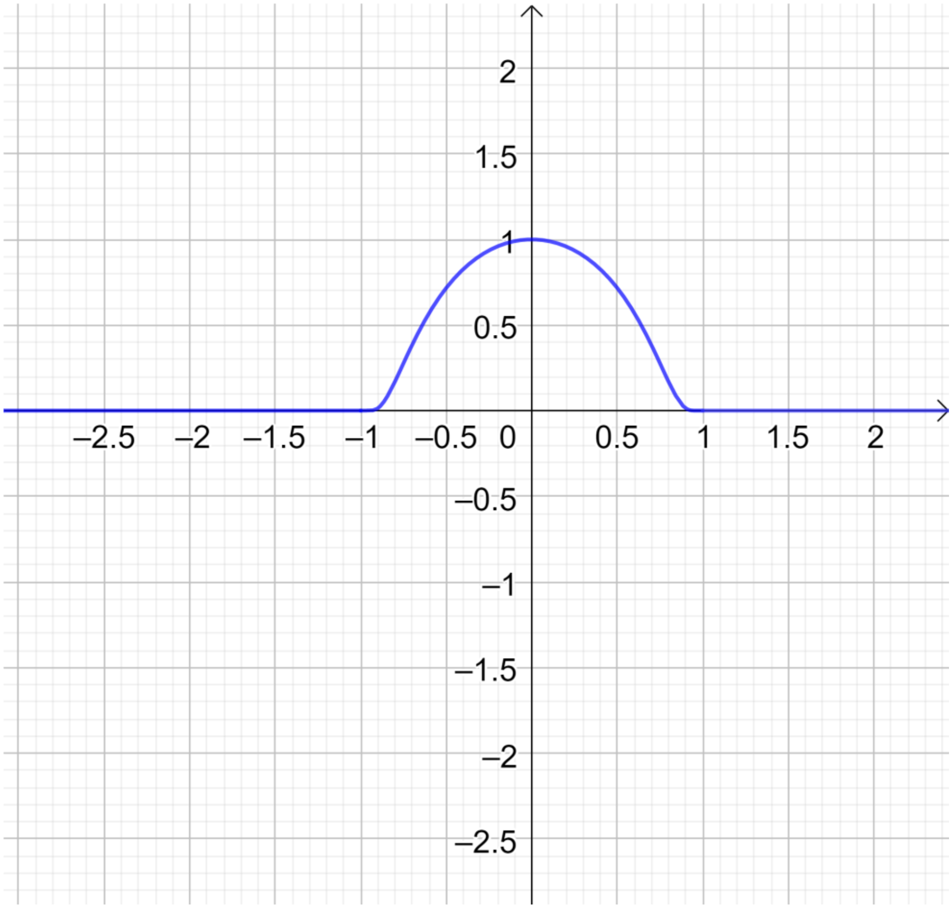
$$\lim_{x\to 1^-} \varphi^{(n+1)}(x) = \lim_{t\to+\infty} P_{n+1}(1)\, t^{2^{n+1}}\, e^{1-t} = 0$$

Or :

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi^{(n+1)}(x) = 0$$

Donc $\varphi^{(n)}$ est dérivable en 1 et $\varphi^{(n+1)}(1) = 0$. Ainsi $\varphi^{(n+1)}$ est continue en 1, donc en -1 par parité et donc sur $\mathbb{R}$.

φ est donc de classe $\mathcal{C}_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$



b) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt$$

Or φ est continue positive et non identiquement nulle sur $[-1,1]$ donc :

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt > 0$$

Ainsi ψ est définie, δ_n de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

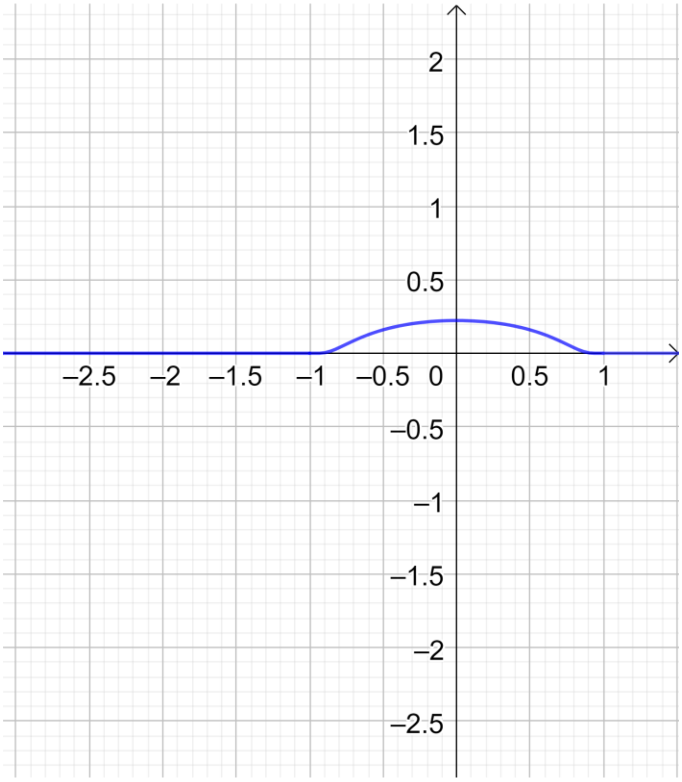
$$S(\delta_n) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

Ainsi :

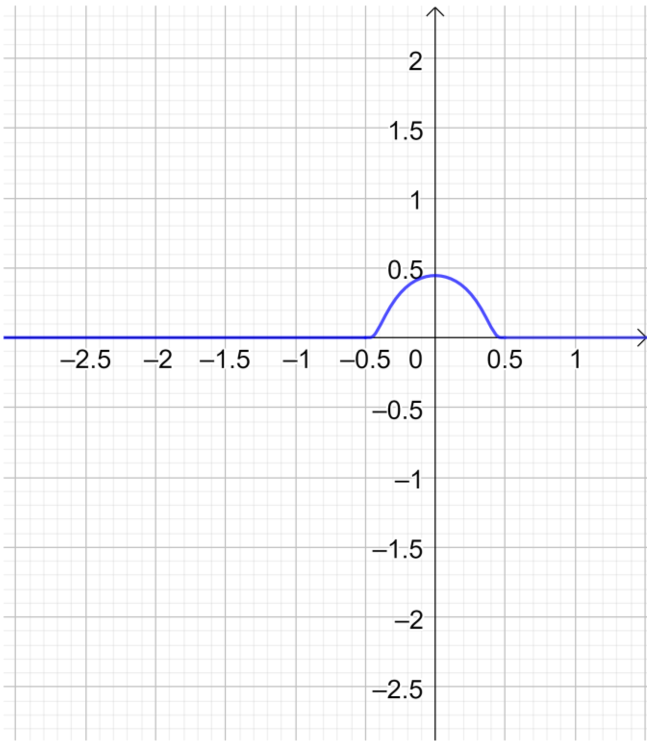
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t)\, dt = \frac{n}{\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(n\, t)\, dt$$

$$= \frac{n}{\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(n\, t)\, dt$$

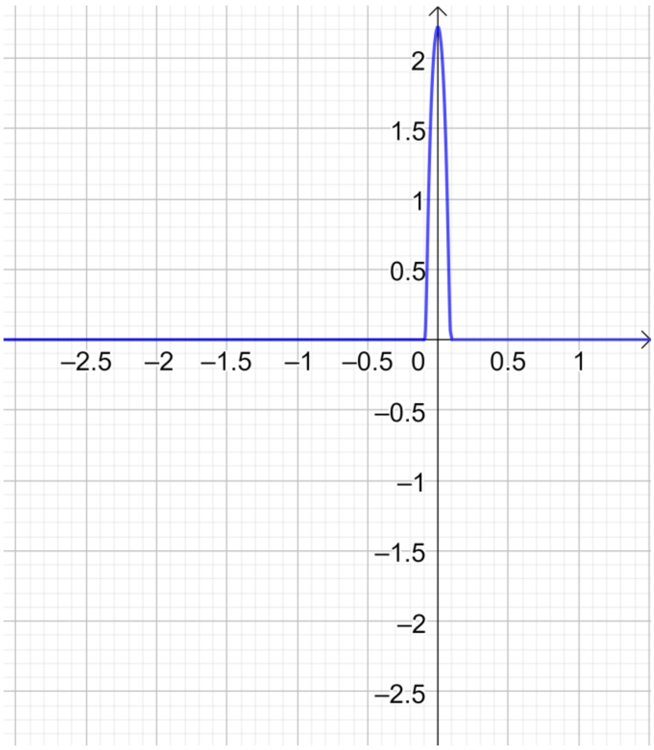
$$= \frac{n}{\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt} \int_{-1}^{1} \varphi(u)\, \frac{du}{n} = 1$$



$\underline{n = 1}$



$\underline{n = 2}$



$n = 10$

Partie 3

5) Soit $(f, g, k) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}$ alors il existe deux réels strictement positifs, a, b tels que f soit nulle en dehors de$[-a, a]$ et g soit nulle en dehors de$[-b, b]$. Posons $c = max(a, b)$. Alors $f + k\ g$ est nulle en dehors de $[-c, c]$ et de plus de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc est dans $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe et comme il n'est pas vide (la fonction nulle est dedans), c'est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6) En reprenant les notations du 5) le produit $f\ g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-c, c]$ donc dans $\mathcal{D}$.

De même f' est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-a, a]$ donc dans $\mathcal{D}$.

7)

a) La fonction de la variable t à x fixé définie par $f(t)g(x - t)$ est à support compact donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ on montre que h est de classe $\mathcal{C}_p$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$h^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(p)}(x - t)dt = \int_{-a}^{a} f(t)g^{(p)}(x - t)dt$$

Initialisation : pour $p = 1$

Posons sur $[-a, a] \times \mathbb{R}$:

$$s(t,x) = f(t)g(x-t)$$

s est une fonction continue de deux variables sur $[-a,a] \times \mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable qui est continue sur $[-a,a] \times \mathbb{R}$ et vaut :

$$\frac{\partial s}{\partial x}(t,x) = f(t)g'(x-t)$$

On en déduit que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$h'(x) = \int_{-a}^{a} f(t)g'(x-t)dt$$

L'hérédité se justifie sur le même principe.

b) Par changement de variable $x - t = u$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du$$

c) Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné. Alors :

$$|f * \delta_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t)f(x-t)dt - f(x) \right| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)f(x-t)dt - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)f(x)dt \right|$$

$$= \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt$$

f étant continue sur $[a-1, b+1]$ elle y est uniformément continue. Soit alors $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, \alpha > 0 : \forall\, (x,y) \in [a-1, b+1]^2 : |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Or :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \alpha \Rightarrow \forall\, x \in [a,b]\ \forall\, t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] : |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, x \in [a,b] : |f * \delta_n(x) - f(x)| < \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)\, \varepsilon\, dt = \varepsilon$$