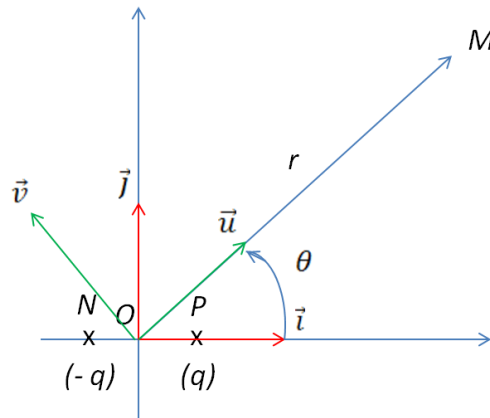


Dipôle électrostatique : Calcul du champ en coordonnées cartésiennes



On considère un dipôle électrostatique dont l'image est une charge négative $-q$ placée en un point N de l'espace et une charge positive q placée en un point P . On se place dans un plan contenant le dipôle et on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ comme défini sur la figure. On rappelle que le potentiel électrostatique associé au champ lointain s'exprime en un point M en coordonnées polaires par :

$$V(M) = k \frac{p \cos(\theta)}{r^2}$$

où $k = 9 \times 10^9$, $p = q \times NM$ (moment dipolaire)

1) Passage en coordonnées cartésiennes

Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y du point M en fonction de ses coordonnées polaires r, θ .

2) Expression du potentiel en coordonnées cartésiennes

Exprimer le potentiel $V(M)$ en fonction des coordonnées cartésiennes x, y , de k et de p

3) Champ électrostatique

Rappeler ce que signifie la notation $\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$ et sa relation avec le champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

Calculer, en fonction de x, y , pour l'expression de $V(M)$ précédente (champ lointain) les dérivées partielles de la fonction potentiel électrostatique :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y}$$

En déduire les composantes du vecteur champ électrostatique dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ toujours en fonction de x, y, k et p

Exprimer également la norme du champ électrique en fonction de x, y, k et p (sans utiliser la formule déjà vue en cours mais directement à partir des composantes cartésiennes du champ électrostatique)

Corrigé :

1)

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

2)

$$V(M) = k p \frac{r \cos(\theta)}{r^3} = k p \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V(M)) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$$

4)

$$V(M) = k p x (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k p \left((x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} + x (2x) \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$$= k p \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$= k p \frac{(x^2 + y^2) - 3x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= k p \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = k p \left(x (2y) \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$$= -k p \frac{3 x y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = k p \frac{2 x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = k p \frac{3 x y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{E}\| &= k p \frac{\sqrt{(2 x^2 - y^2)^2 + (3 x y)^2}}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= k p \frac{\sqrt{4 x^4 + 5 x^2 y^2 + y^4}}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = k p \frac{\sqrt{(4 x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= k p \frac{\sqrt{(4 x^2 + y^2)} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = k p \frac{\sqrt{(4 x^2 + y^2)}}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

En remplaçant x, y par leurs expressions en coordonnées polaires, on retrouve la formule vue en cours :

$$\|\vec{E}\| = k p \frac{\sqrt{(4 r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)^2)}}{(r^2)^2} = k p \frac{\sqrt{(4 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)^2)}}{r^3}$$