Diagonalisation d'une matrice complexe

Enoncé :

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice et la diagonaliser :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\,\boldsymbol{i} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2}\,\boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Solution :

Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} (1-X) & 0 & -2 \\ 0 & -X & 2\,i \\ -2 & 2\,i & -X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -X & 2\,i \\ 2\,i & -X \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -X & 2\,i \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\,(X^2+4) - 2\,(-2\,X) = -X^3 + X^2 + 4$$

On vérifie que l'on a :

$$Tr(A) = 1, \;\; det(A) = 4$$

Car on sait que :

$$P_A(X) = -X^3 + Tr(A)\,X^2 + b\,X + \det{(A)}$$

Factorisons le polynôme en notant que 2 est racine :

$$P_A(X) = (X-2)\,(-X^2 + b\,X - 2) = -X^3 + (b+2)\,X^2 + (-2-2\,b)\,X + 4$$

Par identification il vient :

$$\begin{cases} b+2 = 1 \\ -2-2\,b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -1$$

d'où :

$$P_A(X) = (X-2)\,(-X^2 - \,X - 2) = -\,(X-2)\,(X^2 + \,X + 2)$$

Le trinôme a pour discriminant :

$$\Delta = 1 - 8 = -7 = \left(i\,\sqrt{7}\right)^2$$

Le polynôme caractéristique a donc 3 racines distinctes :

$$\lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \ , \ \lambda_3 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Le polynôme étant scindé avec des racines simples, la matrice A est donc diagonalisable.

Pour calculer un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ_1, on résout :

$$(A - 2\, I_3)\, X = 0$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2\,i \\ -2 & 2\,i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2\,z = 0 \\ -2\,y + 2\,i\,z = 0 \\ -2\,x + 2\,i\,y - 2\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\,z \\ y = \ i\,z \\ 4\,z - 2\,z - 2\,z = 0 \end{cases}$$

On peut prendre pour vecteur propre :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

On fait le même travail avec λ_2

$$\begin{pmatrix} \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} & 2\,i \\ -2 & 2\,i & \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} x - 2\,z = 0 \\ \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\, y + 2\,i\,z = 0 \\ -2\,x + 2\,i\,y + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\, z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3 + i\sqrt{7}}\, z = \dfrac{3 - i\sqrt{7}}{4}\, z \\ y = \dfrac{-4\, i}{3 + i\sqrt{7}}\, z = \dfrac{-\sqrt{7} - i}{2}\, z \\ \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{2}\, z + \dfrac{2 - i\sqrt{7}}{2}\, z + \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}\, z = 0 \end{cases}$$

On peut prendre pour vecteur propre :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 3 - i\sqrt{7} \\ -2\sqrt{7} - 2\, i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Par un travail similaire on aboutit pour λ_3 au vecteur propre :

$$V_3 = \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{7} \\ 2\sqrt{7} - 2\, i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice formée par les vecteurs propres :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 - i\sqrt{7} & 3 + i\sqrt{7} \\ i & -2\sqrt{7} - 2\, i & 2\sqrt{7} - 2\, i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit D la matrice diagonale formée par les valeurs propres :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$$

La diagonalisation de A s'écrit alors :

$$A\, P = P\, D$$

ou encore :

$$P^{-1} A\, P = D$$