Diagonalisation d'une matrice symétrique

Nous nous intéressons à la diagonalisation dans $\mathbb{R}$ des matrices du type :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & & b & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & & b & a \end{pmatrix}$$

autrement dit, des matrices carrées d'ordre n ayant un même nombre a sur leur diagonale et des b partout ailleurs. Nous considérerons le cas non trivial où b est non nul sinon A est déjà une matrice diagonale.

Rappelons que diagonaliser une matrice dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer une base de vecteurs propres et de valeurs propres associées, c'est-à-dire trouver des nombres réels λ associés à des vecteurs colonnes X d'ordre n différents de la colonne nulle tels que :

$$A\,X = \lambda\,X$$

Soit encore :

$$(A - \lambda\,I)\,X = O$$

O désignant le vecteur colonne d'ordre n nul et I la matrice identité d'ordre n.

Posant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nous sommes conduits à résoudre le système :

$$\begin{cases} (a-\lambda)\,x_1 + b\,x_2 \quad \cdots \quad + b\,x_{n-1} + b\,x_n = 0 \\ b\,x_1 + (a-\lambda)\,x_2 \quad + b\,x_{n-1} + b\,x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ b\,x_1 + b\,x_2 \quad \cdots \quad + (a-\lambda)\,x_{n-1} + b\,x_n = 0 \\ b\,x_1 + b\,x_2 \quad + b\,x_{n-1} + (a-\lambda)\,x_n = 0 \end{cases}$$

Numérotons alors les équations de 1à n. En soustrayant la (n-1) à la n puis la (n-2) à la (n-1) et ainsi de suite jusqu'à la (1) à la (2), nous obtenons le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} (a-\lambda)\ x_1 + b\ x_2 \ \cdots + b\ x_{n-1} + b\ b\,x_n = 0 \\ -(a-b-\lambda)\,x_1 + (a-b-\lambda)\,x_2 = 0 \\ \ddots \\ \ddots \quad (a-b-\lambda)\,x_{n-1} = 0 \\ -(a-b-\lambda)\,x_{n-1} + (a-b-\lambda)\ x_n = 0 \end{cases}$$

Il y a alors deux cas à envisager :

1er cas : $\boldsymbol{\lambda = a - b}$

Hormis la première, les (n-1) équations suivantes sont vérifiées. Le système équivaut alors à sa première équation, soit, après avoir remplacé λ par sa valeur :

$$b\,x_1 + b\,x_2 + \cdots + b\,x_n = 0$$

Or b n'étant pas nul, cette équation équivaut à :

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0}$$

Le sous espace propre E_{a-b} associé à la valeur propre $\lambda = a - b$ est alors l'ensemble des vecteurs colonnes X de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \ldots - x_n \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $x_2, x_3 \ldots x_n$ nombres réels quelconques. Cet ensemble apparaît donc comme une combinaison de (n-1) vecteurs colonnes dont on peut vérifier qu'ils sont indépendants. C'est donc un espace vectoriel de dimension (n-1).

2ème cas : $\boldsymbol{\lambda \neq a - b}$

Après division par $(a - b - \lambda)$ des (n-1) équations suivant la première, le système équivaut au suivant :

$$\begin{cases} (a-\lambda)\, x_1 + \; b\, x_2 + \cdots + \; b\, x_n = 0 \\ \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} (a + (n-1)b - \lambda)\, x_1 = 0 \\ \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{cases}}$$

Pour qu'il y ait une colonne X non nulle associé à λ, il faut donc et il suffit que :

$$\boxed{\lambda = a + (n-1)b}$$

L'espace propre associé à cette valeur propre est alors l'ensemble des vecteurs colonnes X de la forme :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

C'est donc un espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle)

Conclusion

La matrice a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = a - b \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = a + (n-1)b$$

Une base de vecteurs propres associé est formé par les vecteurs colonnes :

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots P_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

les (n-1) premiers vecteurs propres étant associés à λ_1 et le dernier à λ_2

Remarque 1

La matrice que nous avons considéré présente une caractéristique particulière, elle est symétrique par rapport à sa diagonale descendante. Nous venons de prouver qu'elle est diagonalisable. Eh bien, sachez que c'est un résultat général valable pour toute matrice symétrique. Il y a même mieux. le produit scalaire de P_n avec chaque vecteur colonne $P_{1,} P_2, .. P_{n-1}$ est nul. Sachant qu'il existe un procédé appelé orthonormalisation de Schmidt permettant de construire à partir d'une famille libre quelconque de vecteurs colonne, une base orthonormale, nous pouvons obtenir une base de vecteurs propres orthonormale. Ceci est un résultat général pour les matrices symétriques réelles, que nous espérons bien vous démontrer clairement un jour, si le temps le permet, car comme à chaque mortel, il nous est compté et la Science est un vaste sujet d'émerveillement inépuisable et non borné !

Remarque 2

Pour les inconditionnels du déterminant et du polynôme caractéristique, je vous les livre en sus.

Le déterminant étant, pour une matrice diagonalisable, le produit de ses valeurs propres avec leur ordre de multiplicité (la dimension de leur sous espace propre associé), nous avons :

$$\mathrm{Det}(A) = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1 \times \lambda_2$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = (a + (n-1)b)\,(a-b)^{n-1}}$$

Et le polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = (\lambda_1 - X) \times (\lambda_1 - X) \times \ldots \times (\lambda_1 - X) \times (\lambda_2 - X)$$

Soit :

$$\boxed{P_A(X) = (a + (n-1)b - X)\,(a - b - X)^{n-1}}$$