Développements généralisés

Enoncés :

1) Donner les développements de :

$$(a+b+c+d)^2$$

$$(a+b+c)^3$$

2) Combien y a-t-il de doubles produits dans le développement de :

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_p\right)^2$$

3) Donner une formule générale pour les développements de :

$$(a+b+c)^n$$

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_p\right)^n$$

Solutions :

1)

$$(a+b+c+d)^2=\left((a+b)+(c+d)\right)^2$$

$$=(a+b)^2+2\,(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2\,a\,b+2\,a\,c+2\,a\,d+2\,b\,c+2\,b\,d+2\,c\,d$$

A noter que c'est la somme des carrés et de tous les doubles produits, qui sont au nombre de six, c'est-à-dire autant qu'on peut faire de sous ensembles à deux éléments pris dans l'ensemble $\{a,b,c,d\}$ soit :

$$\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}$$

$$(a+b+c)^3 = \big((a+b)+c\big)^3$$

$$= (a+b)^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3$$

$$= a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 + 3\,(a^2 + 2\,a\,b + b^2)\,c + 3\,a\,c^2 + 3\,b\,c^2 + c^3$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + 3\,a^2\,c + 3\,a\,c^2 + 3\,b^2\,c + 3\,b\,c^2$$

2)

La remarque précédente montre que le nombre de doubles produits est :

$$\binom{p}{2} = \frac{p\,(p-1)}{2}$$

3)

$$\boxed{(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ 0\le q\le n-k}} \binom{n}{k}\binom{n-k}{q}\,a^k\,b^q\,c^{n-k-q}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_p\right)^n\\ &= \sum_{\substack{0\le k_1\le n\\ 0\le k_2\le n-k_1\\ \\ 0\le k_{p-1}\le n-k_1-k_2\ldots-k_{p-2}}} \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\ldots\binom{n-k_1-k_2\ldots-k_{p-2}}{k_{p-1}}\,{a_1}^{k_1}\,{a_2}^{k_2}\ldots{a_{p-1}}^{k_{p-1}}\,{a_p}^{n-k_1-k_2\ldots-k_{p-2}}\end{aligned}}$$