<u>Enoncé</u> :

Soit la fonction définie sur $[\mathbf{1}, +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt}$$

1) Déterminer un équivalent simple de $\boldsymbol{f(x)}$ en $+\infty$

Conseil : On pourra procéder à une intégration par partie suivie d'un encadrement

2) On considère l'échelle de comparaison en $+\infty$:

$$\boldsymbol{\left(\frac{e^x}{x^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}}$$

Montrer que $\boldsymbol{f}$ admet un développement asymptotique à tout ordre sur cette échelle en $+\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\boldsymbol{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel non nul $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{e^x}{x^k} + o\left(\frac{e^x}{x^n}\right)}$$

Conseil : On pourra procéder à une succession d'intégrations par partie et conjecturer une relation faisant apparaitre la partie régulière du développement asymptotique.

Réponse :

1)

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, e^t\, dt$$

Posons :

$$u(t) = \frac{1}{t},\ \ v'(t) = e^t$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2},\ \ v(t) = e^t$$

Alors, par intégration par partie :

$$f(x) = \left[\frac{1}{t}\, e^t\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, e^t\, dt = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, e^t\, dt$$

Posons à nouveau :

$$u(t) = \frac{1}{t^2},\ \ v'(t) = e^t$$

$$u'(t) = -\frac{2}{t^3},\ \ v(t) = e^t$$

Et intégrons à nouveau par partie :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \left[\frac{1}{t^2}\ e^t\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\ e^t\ dt$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\ e + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\ e^t\ dt$$

Considérons alors sur $[1, +\infty[$ la fonction :

$$g(t) = \frac{1}{t^3}\ e^t$$

$$g'(t) = \frac{-3}{t^4}\ e^t + \frac{1}{t^3}\ e^t = (t-3)\frac{e^t}{t^4}$$

Ainsi, pour $x > 3, g'(t) \leq 0\ sur\ [1,3]$, $g'(t) \geq 0\ sur\ [3, x]$ donc g est décroissante sur $[1,3]$ et croissante sur $[3, x]$. Ainsi :

$$0 \leq \int_1^x g(t)dt = \int_1^3 g(t)dt + \int_3^x g(t)dt \leq (3-1)\ g(1) + (x-3)\ g(x)$$

Donc :

$$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t^3}\ e^t\ dt \leq 2\ e + (x-3)\ \frac{e^x}{x^3}$$

Et :

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\ e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\ e + 2\ \left(2\ e + (x-3)\ \frac{e^x}{x^3}\right)$$

Soit :

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\ e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + 3\frac{e^x}{x^2} - 6\ \frac{e^x}{x^3} + 2\ e$$

Or en $+\infty$:

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\ e \sim \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{e^x}{x} + 3\frac{e^x}{x^2} - 6\ \frac{e^x}{x^3} + 2\ e \sim \frac{e^x}{x}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(x) \sim \frac{e^x}{x}}$$

2) Reprenons la relation :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\ e + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\ e^t\ dt$$

Et intégrons à nouveau par partie en posant :

$$u(t) = \frac{1}{t^3}, \;\; v'(t) = e^t$$

$$u'(t) = -\frac{3}{t^4}, \;\; v(t) = e^t$$

Alors :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\,e + 2\left(\left[\frac{1}{t^3}\,e^t\right]_1^x + 3\int_1^x \frac{1}{t^4}\,e^t\,dt\right)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\,\frac{e^x}{x^3} + 3\,!\int_1^x \frac{1}{t^4}\,e^t\,dt - 4\,e$$

Conjecturons alors la relation pour un entier $n \geq 1$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)!\frac{e^x}{x^k} + n!\int_1^x \frac{1}{t^{n+1}}\,e^t\,dt + b_n\,e}$$

Et montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant en intégrant par partie en posant :

$$u(t) = \frac{1}{t^{n+1}}, \;\; v'(t) = e^t$$

$$u'(t) = -\frac{n+1}{t^{n+2}}, \;\; v(t) = e^t$$

Alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)!\frac{e^x}{x^k} + n!\left(\left[\frac{1}{t^{n+1}}\,e^t\right]_1^x + (n+1)\int_1^x \frac{1}{t^{n+2}}\,e^t\,dt\right) + b_n\,e$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)!\frac{e^x}{x^k} + n!\,\frac{e^x}{x^{n+1}} + (n+1)!\int_1^x \frac{1}{t^{n+2}}\,e^t\,dt + +(b_n - n!)\,e$$

Finalement :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)!\frac{e^x}{x^k} + (n+1)!\int_1^x \frac{1}{t^{n+2}}\,e^t\,dt + +b_{n+1}\,e$$

Où :

$$b_{n+1} = b_n - n!$$

Donc la propriété s'hérite et est donc vraie pour tout $n \geq 1$. En prime, nous avons, pour tout $n \geq 1$:

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = -1 - \sum_{k=1}^{n-1} k!$$

Soit :

$$\boxed{b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} k!}$$

Pour le développement asymptotique, repartons de :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + (n+1)! \int_1^x \frac{1}{t^{n+2}}\ e^t\ dt + +b_{n+1}\ e$$

Considérons alors sur $[1, +\infty[$ la fonction :

$$g(t) = \frac{1}{t^{n+2}}\ e^t$$

$$g'(t) = -\frac{n+2}{t^{n+3}}\ e^t + \frac{1}{t^{n+2}}\ e^t = (t-(n+2))\frac{e^t}{t^{n+3}}$$

Ainsi, pour $x > n+2, g'(t) \leq 0\ sur\ [1, n+2]\ , g'(t) \geq 0\ sur\ [n+2, x]$ donc g est décroissante sur $[1, n+2]$ et croissante sur $[n+2, x]$. Ainsi :

$$0 \leq \int_1^x g(t)dt = \int_1^{n+2} g(t)dt + \int_{n+2}^x g(t)dt \leq (n+1)\ g(1) + (x-(n+2))\ g(x)$$

Donc :

$$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t^{n+2}}\ e^t\ dt \leq (n+1)\ e + (x-(n+2))\ \frac{e^x}{x^{n+2}}$$

Et :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + b_{n+1}\ e \leq f(x)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + (n+1)! \left((n+1)\ e + (x-(n+2))\ \frac{e^x}{x^{n+2}}\right) + +b_{n+1}\ e$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + o\left(\frac{e^x}{x^n}\right) \leq f(x) \leq \sum_{k=1}^{n} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + o\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$$

D'où le développement asymptotique en $+\infty$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + o\left(\frac{e^x}{x^n}\right)}$$