

Encadrement affine d'une fonction convexe ou concave

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a; b]$ et strictement convexe c'est à dire telle que :

$$\forall x \in [a; b] : f''(x) > 0$$

Alors, pour tout c de $[a; b]$, en notant $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c))$ la courbe de f peut être encadrée par les courbes définies par la corde $[A; B]$ et la tangente à la courbe en C .

Plus précisément, la corde ayant pour équation :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

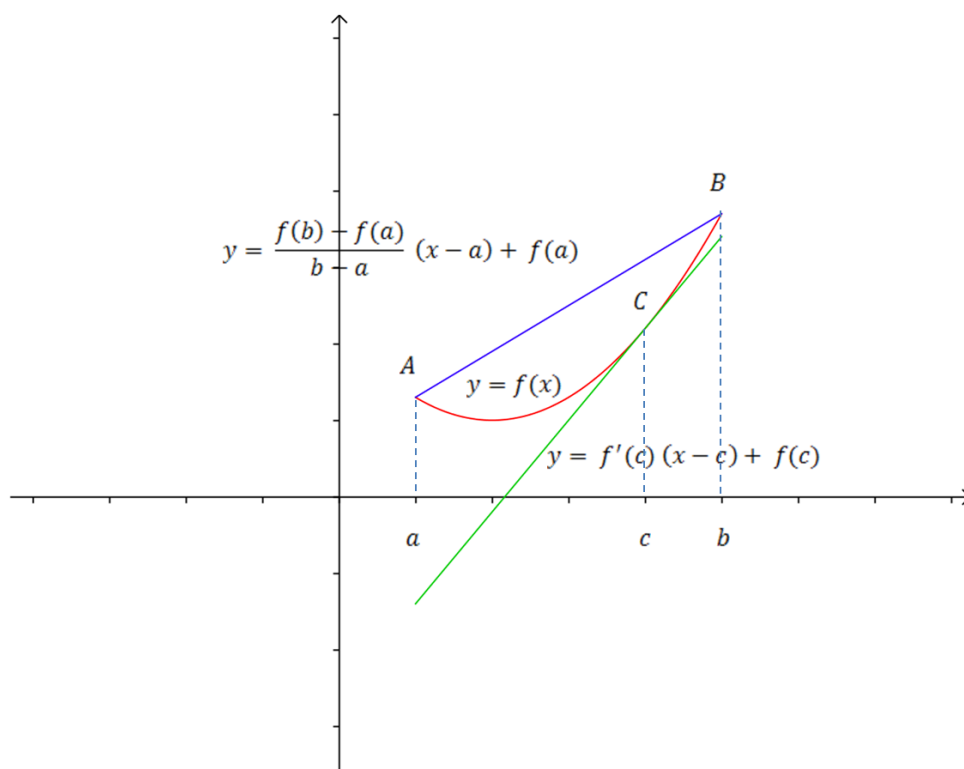
et la tangente en C :

$$y = f'(c) (x - c) + f(c)$$

on a :

$$\forall x \in [a; b] : f'(c) (x - c) + f(c) \leq f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

Ceci définit donc un encadrement de f sur $[a; b]$ par deux fonctions affines et s'illustre parfaitement sur un graphique.



Dans le cas d'une fonction concave ($f''(x) < 0$) l'encadrement est dans l'autre sens

Preuve :

Posons :

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

Le développement de Taylor Lagrange en c assure pour $x \neq c$ l'existence d'un réel $d(x)$ dans l'intervalle $]c; x[$ ou $]x; c[$ selon que $c < x$ ou $x < c$ que tel que :

$$g(x) = \frac{(x - c)^2}{2} f''(d(x))$$

donc :

$$g(x) > 0$$

et comme : $g(c) = 0$ il en résulte l'inégalité inférieure :

$$f'(c)(x - c) + f(c) \leq f(x)$$

à noter que l'inégalité est stricte sur $[a; b] \setminus \{c\}$

Posons :

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

h est dérivable sur $[a; b]$ et :

$$\forall x \in [a; b] : h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Or le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel d dans $]a; b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(d)$$

Ainsi :

$$\forall x \in [a; b] : h'(x) = f'(x) - f'(d)$$

Or f' est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive. On en déduit le tableau de variations de h :

x	a	d	b
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$ 0

Il apparaît que :

$$\forall x \in [a; b] : h(x) \leq 0$$

Soit :

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

à noter que l'inégalité est stricte sur $]a; b[$