Développement d'une forme trilinéaire alternée

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et f une forme trilinéaire alternée sur $\mathbb{E}^3$ muni de sa base canonique :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le développement de f s'écrit, après élimination des termes nuls:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}\right)$$

$$= f(x_{11}\, E_1 + x_{21}\, E_2 + x_{31}\, E_3, x_{12}\, E_1 + x_{22}\, E_2 + x_{32}\, E_3, x_{13}\, E_1 + x_{23}\, E_2 + x_{33}\, E_3)$$

$$= x_{11}\, x_{22}\, x_{33}\, f(E_1, E_2, E_3) + x_{11}\, x_{32}\, x_{23}\, f(E_1, E_3, E_2)$$

$$+ x_{21}\, x_{12}\, x_{33}\, f(E_2, E_1, E_3) + x_{21}\, x_{32}\, x_{13}\, f(E_2, E_3, E_1)$$

$$+ x_{31}\, x_{12}\, x_{23}\, f(E_3, E_1, E_2) + x_{31}\, x_{22}\, x_{13}\, f(E_3, E_2, E_1)$$

Examinons les 6 termes ainsi que les caractéristiques des permutations qui leurs sont associées :

Terme	Permutation σ	Nombre de transpositions $T(\sigma)$	Signature de σ $\varepsilon(\sigma)$
$x_{11}\, x_{22}\, x_{33}\, f(E_1, E_2, E_3)$	$(1,2,3) = Id$	0	1
$x_{11}\, x_{32}\, x_{23}\, f(E_1, E_3, E_2)$	$(1,3,2) = \tau_{23}$	1	-1
$x_{21}\, x_{12}\, x_{33}\, f(E_2, E_1, E_3)$	$(2,1,3) = \tau_{12}$	1	-1
$x_{21}\, x_{32}\, x_{13}\, f(E_2, E_3, E_1)$	$(2,3,1) = \tau_{12} \circ \tau_{23}$	2	1
$x_{31}\, x_{12}\, x_{23}\, f(E_3, E_1, E_2)$	$(3,1,2) = \tau_{23} \circ \tau_{12}$	2	1
$x_{31}\, x_{22}\, x_{13}\, f(E_3, E_2, E_1)$	$(3,2,1) = \tau_{13}$	1	-1

D'où :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}\right)$$

$$= (x_{11}\, x_{22}\, x_{33} - x_{11}\, x_{32}\, x_{23}$$

$$- x_{21}\, x_{12}\, x_{33} + x_{21}\, x_{32}\, x_{13}$$

$$+ x_{31}\, x_{12}\, x_{23} - x_{31}\, x_{22}\, x_{13})\, f(E_1, E_2, E_3)$$

Appliquons cette technique de calcul au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

On dresse dans un tableau la liste des permutations. Chaque permutation indique quelle composante sélectionner pour chaque colonne. Ainsi $\sigma = (2,1,3)$ indique qu'il faut choisir pour la première colonne le deuxième terme, pour la deuxième colonne le premier et pour la troisième colonne le troisième.

Permutation σ	Produit de termes	Nombre de transpositions $T(\sigma)$	Signature de σ $\varepsilon(\sigma)$
$(1,2,3) = Id$	$1 \times 5 \times 9 = 45$	0	1
$(1,3,2) = \tau_{23}$	$1 \times 6 \times 8 = 48$	1	-1
$(2,1,3) = \tau_{12}$	$2 \times 4 \times 9 = 72$	1	-1
$(2,3,1) = \tau_{12} \circ \tau_{23}$	$2 \times 6 \times 7 = 84$	2	1
$(3,1,2) = \tau_{23} \circ \tau_{12}$	$3 \times 4 \times 8 = 96$	2	1
$(3,2,1) = \tau_{13}$	$3 \times 5 \times 7 = 105$	1	-1

Ainsi :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 0$$

On retrouve bien évidemment le même résultat en développant le déterminant suivant sa première colonne ce qui est plus commode.