1) Soit f et g deux fonctions de classe C_n ($n \in \mathbb{N}$) sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f+g,\ f-g,\ a\,f,\ f\times g$ sont de classe C_n sur I et si ne s'annule pas sur I, $f{:}\,g$ est de classe C_n sur I

2) Soit la fonction définie par :

$$f_n(x) = x^{n-1}\, e^{\frac{1}{x}}$$

Montrer que f_n est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer l'expression de sa dérivée d'ordre n.

3) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie par :

$$f_n(x) = x^n\, Ln(x)$$

Montrer que f_n est de classe C_∞ sur $]0, +\infty[$ et déterminer l'expression de sa dérivée d'ordre n.

4) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$si\ x \neq 0 : f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f(0) = 0$$

Montrer que f est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$.

Solutions :

1)

Par une récurrence triviale on a :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(f-g)^{(n)} = f^{(n)} - g^{(n)}$$

$$(c\,f)^{(n)} = c\,f^{(n)}$$

Il en découle que $f+g, f-g, c\,f$ sont de classe C_n sur I.

Montrons par récurrence sur $1 \leq k \leq n$ que $f \times g$ est dérivable à l'ordre k sur I et que :

$$\boxed{(f\times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\, f^{(i)}\, g^{(k-i)}}$$

Initialisation : pour $k = 0$ c'est trivial et pour $k = 1$:

$$(f\times g)^{(1)} = f^{(1)}\, g^{(0)} + f^{(0)}\, g^{(1)}$$

Donc la propriété est vérifiée :

Hérédité : on suppose la propriété vraie pour $k \leq n-1$ alors :

$$(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Donc $(f \times g)^{(k)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$(f \times g)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k+1-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$

$$= f^{(k+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right) f^{(i)} g^{(k+1-i)} + f^{(0)} g^{(k+1)}$$

$$= f^{(k+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)} + f^{(0)} g^{(k+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$

Ce qui prouve l'hérédité

Ainsi $f \times g$ est de classe C_n sur I.

Montrons enfin par récurrence sur $0 \leq p \leq n$ que $f : g$ est de classe C_p sur I et que $(f : g)^{(p)}$ est une somme de termes de la forme :

$$c\, f^{(k)}\, g^{(l)}\, g^m$$

où k, l sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à p et $m \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$.

Initialisation : $p = 0$

$$f : g = f^{(0)}\, g^{(0)}\, g^0$$

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $p \leq n-1$ alors $(f : g)^{(p)}$ est une somme de termes de la forme :

$$f^{(k)}\, g^{(l)}\, g^m$$

Et donc $(f : g)^{(p+1)}$ est une somme de termes de la forme :

$$\left(f^{(k)}\, g^{(l)}\, g^m\right)' = f^{(k+1)}\, g^{(l)}\, g^m + f^{(k)}\, g^{(l+1)}\, g^m + f^{(k)}\, g^{(l+2)} m\, g^{m-1}$$

Ce qui prouve l'hérédité.

Ainsi $f : g$ est de classe C_n sur I

2) Les fonctions $x \to x^{n-1}$, $x \to e^{\frac{1}{x}}$ sont de classe C_n sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc leur produit est également de classe C_n sur $\mathbb{R}^*$ et donc de classe C_∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Pour trouver la dérivée d'ordre n, voyons si une formule se dégage pour les premières valeurs de n.

$$n = 1: \quad \left(x^0\, e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{-1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

$$n = 2: \quad \left(x^1\, e^{\frac{1}{x}}\right)'' = \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^2}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}}$$

$$n = 3: \quad \left(x^2\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(3)} = \left((2\,x - 1)\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(2)} = \left(\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}\right)^{(1)}$$

$$= \left(\left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) - \frac{1}{x^2}\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^3}{x^4}\, e^{\frac{1}{x}}$$

Faisons ainsi la conjecture suivante au rang $n \geq 3$: pour tout $3 \leq k \leq n$:

$$\boxed{\left(x^{k-1}\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\, e^{\frac{1}{x}}}$$

Et montrons que cette formule reste valable au rang $n + 1$:

$$\left(x^n\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} = \left(\left(x^n\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(1)}\right)^{(n)} = \left((n\, x^{n-1} - x^{n-2})\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = n\left(x^{n-1}\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} - \left(x^{n-2}\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}$$

$$= n\, \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{\frac{1}{x}} - \left(\left(x^{n-2}\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)}\right)^{(1)} = n\, \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\, e^{\frac{1}{x}}\right)^{(1)}$$

$$= n\, \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{\frac{1}{x}} - \left(-n\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^2}\, \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1+1}}\, e^{\frac{1}{x}}$$

Donc la conjecture est vérifiée par récurrence.

3) Les fonctions $x \to x^n$, $x \to Ln(x)$ sont de classe C_n sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc leur produit est également de classe C_n sur $]0, +\infty[$ et donc de classe C_∞ sur $]0, +\infty[$.

Dérivée d'ordre n :

Première méthode : on dérive successivement :

$$(x^n\, Ln(x))^{(1)} = n\, x^{n-1}\, Ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}\,(n\, Ln(x) + 1)$$

$$(x^n\, Ln(x))^{(2)} = x^{n-2}\,(n\,(n-1)Ln(x) + n - 1 + n)$$

$$(x^n\, Ln(x))^{(3)} = x^{n-2}\,(n\,(n-1)\,(n-2)Ln(x) + n\,(n-1) + n(n-2) + (n-1)(n-2))$$

On observe que la constante derrière le terme en $Ln(x)$ est la somme des produits obtenus en multipliant les facteurs $n, (n-1),\ (n-2)$ deux à deux.

Cela suggère pour la dérivée d'ordre n un terme analogue formé des produits de $n-1$ facteurs distincts choisis parmi $n, (n-1),\ (n-2), \dots, 2, 1$. Ainsi :

$$(x^n\, Ln(x))^{(n)} = x^{n-n}\left(n\,!\ Ln(x) + \frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} + \cdots + \frac{n!}{n})\right)$$

Soit :

$$\boxed{(x^n\, Ln(x))^{(n)} = n\,!\left(Ln(x) + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}$$

Deuxième méthode : on cherche une relation de récurrence : Pour $n \geq 1$:

$$(x^n\, Ln(x))^{(n)} = \left((x^n\, Ln(x))^{(1)}\right)^{(n-1)} = (n\, x^{n-1}\, Ln(x) + x^{n-1})^{(n-1)}$$

$$= n\,(x^{n-1}\, Ln(x))^{(n-1)} + (x^{n-1})^{(n-1)}$$

$$= n\,(x^{n-1}\, Ln(x))^{(n-1)} + (n-1)!$$

Posons alors pour x fixé dans $]0, +\infty[$:

$$U_n = (x^n\, Ln(x))^{(n)}$$

Alors pour $n \geq 1$:

$$U_n = n\, U_{n-1} + (n-1)!$$

Faisons un changement de suite en posant :

$$U_n = n!\ V_n$$

Alors :

$$n!\ V_n = n\,(n-1)!\ V_{n-1} + +(n-1)!$$

Donc :

$$V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n}$$

Et :

$$\sum_{k=1}^{n}(V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$V_n - V_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Or :

$$V_0 = U_0 = Ln(x)$$

Donc :

$$V_n = Ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Et :

$$U_n = n! \left(Ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$

On retrouve bien la même expression.

<u>Exercice 4)</u> Montrons un préliminaire pour tout réel $a > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^a} f(x) = 0$$

En effet :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^a} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \to +\infty} t^a e^{-t^2} = \lim_{t \to +\infty} e^{a\,Ln(t)} e^{-t^2} = \lim_{t \to +\infty} e^{a\,Ln(t) - t^2} = 0$$

Une conséquence de ce préliminaire est que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\lim_{x \to 0^+} P\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = 0$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\exists\, P_n \in \mathbb{R}[X] : \forall\, x \in \mathbb{R}^* : f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x), \qquad f^{(n)}(0) = 0$$

Initialisation : $n = 0$

On prend $P_0 = 1$. La propriété est vérifiée.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n. Alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

Donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) f(x)$$

Posons :

$$P_{n+1} = -X^2\, P'_n + 2\, X^3\, P_n$$

Alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(n+1)}(x) = 0$$

Posons :

$$Q_{n+1} = P_{n+1}(-X)$$

Alors :

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n+1)}(x) = \lim_{t\to 0^+} f^{(n+1)}(-t) = \lim_{t\to 0^+} P_{n+1}\left(-\frac{1}{t}\right) f(-t) = \lim_{t\to 0^+} Q_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) f(t) = 0$$

Or pour $x \in \mathbb{R}$ le théorème des accroissements finis montre l'existence de $c_x \in]0, x[$ ou $]x, 0[$ tel que :

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) = x\, f^{(n+1)}(c_x)$$

Ainsi :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(c_x) = 0$$

Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et :

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

Ce qui prouve l'hérédité.

f est donc dérivable à tout ordre donc de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$.