

Enoncé :

Soit f une fonction de classe C_2 sur $[0, +\infty[$:

- 1) Construire une telle fonction qui soit telle que f admette une limite en $+\infty$ mais pas f'
- 2) On suppose que f'' est négative ou nulle sur $[0, +\infty[$. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$

Réponses :

1) Nous allons construire une fonction dont la courbe est une sorte de fractale avec pour motif une période de la fonction sinus :

On définit d'abord pour tout $n \geq 1$ une suite d'intervalle $I_n = [t_{n-1}, t_n[$ où :

$$t_n = 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Chaque intervalle I_n est donc de longueur $\frac{2\pi}{n}$ et t_n tend vers $+\infty$ ce qui permet de définir une fonction f sur $[0, +\infty[$ de la sorte :

Pour $n \geq 1$ et $x \in [t_{n-1}, t_n[$:

$$f(x) = a_n \sin(n(x - t_{n-1}))$$

On note tout d'abord que :

$$\lim_{x \rightarrow t_n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t_n^+} f(x) = 0 = f(t_n)$$

Donc f est continue sur $[0, +\infty[$.

On définit ensuite la suite (a_n) de telle sorte que f soit dérivable à gauche et dérivable à droite en t_n avec des nombres dérivés égaux :

$$\lim_{x \rightarrow t_n^-} \frac{f(x) - f(t_n)}{x - t_n} = \lim_{x \rightarrow t_n^-} \frac{a_n \sin(n(x - t_{n-1}))}{x - t_n} = \lim_{x \rightarrow t_n^-} \frac{a_n \sin(n(x - t_n))}{x - t_n} = n a_n$$

$$\lim_{x \rightarrow t_n^+} \frac{f(x) - f(t_n)}{x - t_n} = \lim_{x \rightarrow t_n^+} \frac{a_{n+1} \sin((n+1)(x - t_n))}{x - t_n} = (n+1) a_{n+1}$$

Donc :

$$(n+1) a_{n+1} = n a_n$$

D'où,

$$n a_n = 1 a_1$$

a_1 étant arbitraire, on peut le prendre égal à 1, auquel cas :

$$a_n = \frac{1}{n}$$

On constate alors que :

$$\lim_{x \rightarrow t_n^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow t_n^+} f'(x) = 1 = f'(t_n)$$

Et donc que f est de classe C_1 sur $[0, +\infty[$.

Vérifions qu'elle est de classe C_2 sur $[0, +\infty[$:

Pour $n \geq 1$ et $x \in [t_{n-1}, t_n[$:

$$f'(x) = n a_n \cos(n(x - t_{n-1}))$$

$$f''(x) = -n^2 a_n \sin(n(x - t_{n-1}))$$

on note alors que :

$$\lim_{x \rightarrow t_n^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow t_n^+} f''(x) = 0$$

Donc f' est dérivable en t_n et :

$$f''(t_n) = 0$$

f est donc de classe C_2 sur $[0, +\infty[$. De plus :

$$\sup_{I_n} (|f(x)|) = \frac{1}{n}$$

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Donc :

$$x > t_{n_0-1} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

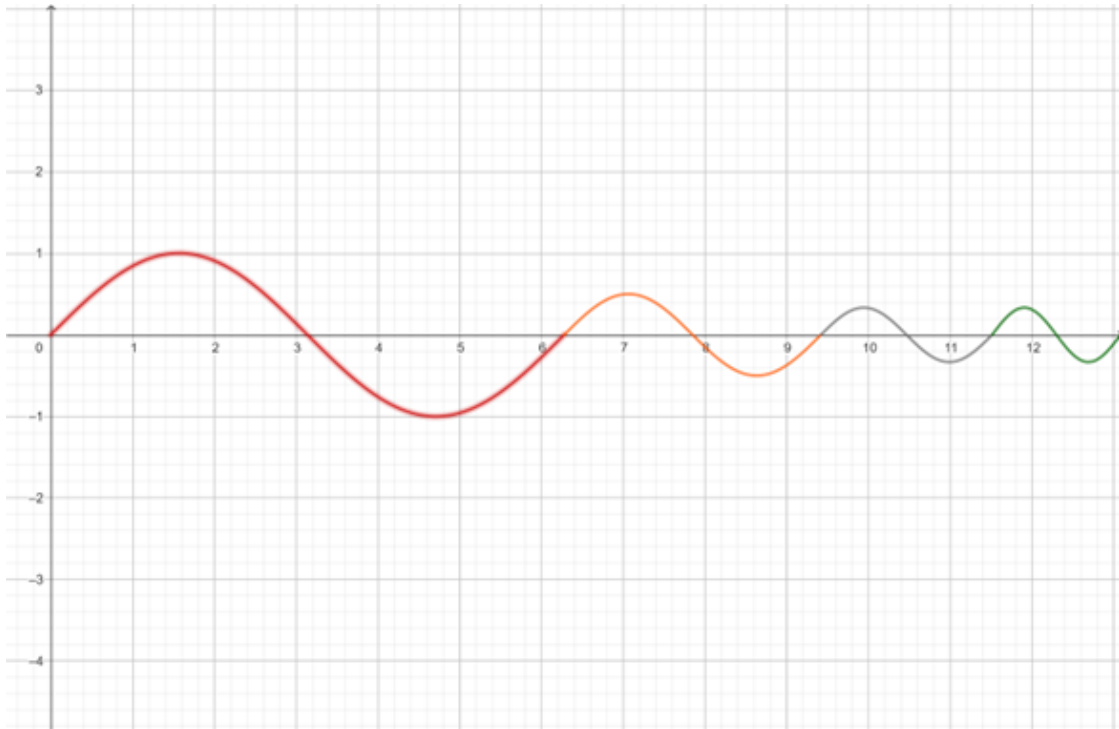
Or :

$$f'(t_n) = 1$$

$$f'\left(t_{n-1} + \frac{\pi}{2n}\right) = 0$$

Donc f' ne peut pas avoir de limite finie en $+\infty$.

Voilà l'allure de la courbe de f :



2) $f'' \leq 0$ fait que f' est décroissante sur $[0, +\infty[$. Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas minorée alors elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et donc :

$$\exists a \in [0, +\infty[: x > a \Rightarrow f'(x) < -2 \Rightarrow |f'(x)| > 2$$

Notons L la limite de f en $+\infty$. Alors :

$$\exists b \in [a, +\infty[: x > b \Rightarrow |f(x) - L| < 1$$

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]b + 1, b + 2[$ tel que :

$$f(b + 2) - f(b + 1) = f'(c)$$

Alors :

$$|f'(c)| = |f(b + 2) - L + L - f(b + 1)| \leq |f(b + 2) - L| + |L - f(b + 1)| < 1 + 1 = 2$$

ceci est contradictoire, donc f' est minorée et tend donc vers une limite finie L' .

Supposons par l'absurde $L' \neq 0$.

Alors :

$$\exists a \in [0, +\infty[: x > a \Rightarrow |f'(x)| > \frac{|L'|}{2}$$

$$\exists b \in [a, +\infty[: x > b \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{|L'|}{4}$$

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]b + 1, b + 2[$ tel que :

$$f(b + 2) - f(b + 1) = f'(c)$$

donc :

$$|f'(c)| \leq |f(b+2) - L| + |L - f(b+1)| < \frac{|L'|}{4} + \frac{|L'|}{4} = \frac{|L'|}{2}$$

ceci est contradictoire donc $L' = 0$.