<u>Enoncé :</u>

1) **<u>Préliminaire</u> : Montrer que l'on a :**

$$\forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}^*, \forall \boldsymbol{k} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{p}-\boldsymbol{1}] \ : \begin{cases} \binom{2\,p}{k} < \binom{2\,p}{k+1} \\ \binom{2\,p+1}{k} < \binom{2\,p+1}{k+1} \end{cases}$$

2) **Déterminer la limite de la suite :**

$$\boldsymbol{U_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$$

On pourra étudier la suite des termes de rang pair et celle des termes de rang impair et s'inspirer de la symétrie existant dans le triangle de Pascal sur les lignes de rang pair et impair.

$\binom{2\,p}{0}$	$\binom{2\,p}{1}$	$\binom{2\,p}{2}$	…	$\binom{2\,p}{p-1}$	$\binom{2\,p}{p}$	$\binom{2\,p}{p+1}$	…	$\binom{2\,p}{2}$	$\binom{2\,p}{1}$	$\binom{2\,p}{0}$

$\binom{2\,p+1}{0}$	$\binom{2\,p+1}{1}$	$\binom{2\,p+1}{2}$	…	$\binom{2\,p+1}{p}$	$\binom{2\,p+1}{p+1}$	…	$\binom{2\,p+1}{2}$	$\binom{2\,p+1}{1}$	$\binom{2\,p+1}{0}$	

<u>Réponse :</u>

1) Montrons la propriété par récurrence sur p.

Initialisation : $p = 1$

$$\begin{cases} \binom{2\,p}{0} = 1 < 2p = \binom{2\,p}{1} \\ \binom{2\,p+1}{0} = 1 < 2\,p+1 = \binom{2\,p+1}{1} \end{cases}$$

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}^*$

Soit alors $k \in [0; p]$:

Si $k = 0$:

$$\begin{cases} \binom{2\,p+2}{0} = 1 < 2\,p+2 = \binom{2\,p+2}{1} \\ \binom{2\,p+3}{0} = 1 < 2\,p+3 = \binom{2\,p+3}{1} \end{cases}$$

Si $k \in [1; p]$

$$\binom{2\,p+2}{k} = \binom{2\,p+1}{k} + \binom{2\,p+1}{k-1} < \binom{2\,p+1}{k+1} + \binom{2\,p+1}{k} = \binom{2\,p+2}{k+1}$$

Et pour $k \in [2; p]$

$$\binom{2\,p+2}{k-1} = \binom{2\,p+1}{k-1} + \binom{2\,p+1}{k-2} < \binom{2\,p+1}{k} + \binom{2\,p+1}{k-1} = \binom{2\,p+2}{k}$$

formule encore valable pour $k = 1$

donc si $k \in [1; p]$

$$\binom{2\,p+3}{k} = \binom{2\,p+2}{k} + \binom{2\,p+2}{k-1} < \binom{2\,p+2}{k+1} + \binom{2\,p+2}{k} = \binom{2\,p+3}{k+1}$$

Donc la propriété est vraie pour $p + 1$

2) Tout d'abord, on peut noter que l'on a :

$$U_n \geq 2$$

Ensuite, on note que pour $n \geq 4$:

$$U_n = 2 + \binom{n}{1}^{-1} + \binom{n}{n-1}^{-1} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1}$$

Donc pour $n = 2\,p \ \geq 4$:

$$U_{2p} = 2 + \frac{1}{p} + \sum_{k=2}^{2\,p-2} \binom{2p}{k}^{-1} = 2 + \frac{1}{p} + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{2p}{k}^{-1} + \binom{2p}{p}^{-1} + \sum_{k=p+1}^{2p-2} \binom{2p}{k}^{-1}$$

En faisant le changement d'indice $k \to 2p - k$ dans la seconde somme, on note qu'elle est égale à la première, donc :

$$U_{2p} = 2 + \frac{1}{p} + 2 \sum_{k=2}^{p-1} \binom{2p}{k}^{-1} + \binom{2p}{p}^{-1}$$

Ainsi, en utilisant le préliminaire :

$$\forall\, k \ \in [1; p-1] : \ \binom{2\,p}{2} \leq \binom{2\,p}{k+1}$$

Donc :

$$\forall\, k \ \in [2; p] : \ \binom{2\,p}{k} \geq \binom{2\,p}{2}$$

Et :

$$\forall\, k \ \in [2; p] : \ \binom{2\,p}{k}^{-1} \leq \binom{2\,p}{2}^{-1}$$

D'où :

$$U_{2p} \leq 2 + \frac{1}{p} + 2 \sum_{k=2}^{p-1} \binom{2\,p}{2}^{-1} + \binom{2\,p}{2}^{-1} = 2 + \frac{1}{p} + (2\,(p-2) + 1) \times \frac{2}{p\,(p-1)}$$

Soit :

$$\boxed{2 \leq U_{2p} \leq 2 + \frac{1}{p} + \frac{2\,(2\,p-3)}{p\,(p-1)}}$$

pour $n = 2\,p + 1 \;\geq 5$:

$$U_{2p+1} = 2 + \frac{2}{2\,p+1} + \sum_{k=2}^{2\,p-1} \binom{2p+1}{k}^{-1} = 2 + \frac{2}{2\,p+1} + \sum_{k=2}^{p} \binom{2p+1}{k}^{-1} + \sum_{k=p+1}^{2\,p-1} \binom{2p+1}{k}^{-1}$$

En faisant le changement d'indice $k \to 2\,p + 1 - k$ dans la seconde somme, on note qu'elle est égale à la première, donc :

$$U_{2p+1} = 2 + \frac{2}{2\,p+1} + 2\,\sum_{k=2}^{p} \binom{2p+1}{k}^{-1}$$

Ainsi, en utilisant le préliminaire :

$$\forall\, k \;\in [2;p] :\; \binom{2\,p+1}{2} \leq \binom{2\,p+1}{k}$$

Et :

$$\forall\, k \;\in [2;p] :\; \binom{2\,p+1}{k}^{-1} \leq \binom{2\,p+1}{2}^{-1}$$

D'où :

$$U_{2p+1} \leq 2 + \frac{2}{2\,p+1} + 2\sum_{k=2}^{p} \binom{2\,p+1}{2}^{-1} = 2 + \frac{2}{2\,p+1} + 2\,(p-1) \times \frac{2}{2\,p\,(2\,p+1)}$$

Soit :

$$\boxed{2 \leq U_{2p} \leq 2 + \frac{2}{2\,p+1} + \frac{2\,p-2}{p\,(2\,p+1)}}$$

Il en résulte par comparaison :

$$\lim_{p\to+\infty} U_{2p} = \lim_{p\to+\infty} U_{2p+1} = 2$$

Et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 2}$$