<u>Somme des carrés des coefficients binomiaux</u>

<u>Enoncé</u> :

Le but de l'exercice est de déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$ une expression plus compacte pour la somme :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Indication :

- Noter que $(a + b + c + \cdots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b + \cdots$.
- Déterminer un polynôme faisant apparaître les coefficients binomiaux
- En déduire un polynôme faisant apparaître leurs carrés

<u>Solution</u> :

En s'inspirant de ce qui a été fait dans le fichier de cours, un polynôme judicieux faisant apparaître les coefficients binomiaux est le polynôme :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^k$$

Un polynôme faisant apparaître les carrés de ces coefficients s'en déduit :

$$[(x+1)^n]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^k\right)^2$$

Or, d'une part, par la formule du binôme de Newton à l'ordre $2\,n$ on a, pour ke membre de gauche :

$$[(x+1)^n]^2 = (x+1)^{2\,n} = \sum_{k=0}^{2\,n} \binom{2\,n}{k}\ x^k$$

D'autre part, en développant le membre de droite :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^k\right)\left(\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q}\ x^q\right)$$

$$= \sum_{(k,q)} \binom{n}{k}\binom{n}{q}\ x^{k+q}$$

Il ne reste plus qu'à identifier les coefficients du terme en x^n dans les deux expressions. Cela conduit à :

$$\binom{2\,n}{n} = \sum_{\substack{(k,q) \\ k+q=n}} \binom{n}{k}\binom{n}{q} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2\,n}{n}}$$