Bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$

Enoncé :

Soit l'application suivante :

$$\mathbb{N}^2 \quad \to \quad \mathbb{N}^*$$

$$(p,q) \to 2^p(2\,q+1)$$

1) Montrer que cette application est une bijection
2) Déterminer l'application réciproque

Solution :

1) Caractère bijectif

Montrons d'abord que l'application est injective en supposant par l'absurde :

$$\exists\,\big((p,q),(p',q')\big) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 : (p,q) \neq (p',q') \text{ et } 2^p(2\,q+1) = 2^{p'}(2\,q'+1)$$

Alors, par disjonction de cas :

1er cas : $p < p'$

et alors $p' - p > 0$ et :

$$(2\,q+1) = 2^{p'-p}(2\,q'+1)$$

donc 2 divise $2\,q+1$ ce qui est absurde

2ème cas : $p > p'$

et alors $p - p' > 0$ et :

$$2^{p-p'}(2\,q+1) = (2\,q'+1)$$

donc 2 divise $2\,q'+1$ ce qui est absurde

3ème cas : $p = p'$

et alors :

$$2\,q+1 = 2\,q'+1$$

$$q = q'$$

donc $(p,q) = (p',q')$ce qui est absurde

Montrons ensuite que l'application est surjective.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ considérons le sous ensemble d'entiers suivant :

$$I = \{m \in \mathbb{N}^* : \ \ 2^m \ divise \ n\}$$

Procédons encore par disjonction de cas :

<u>1^er cas</u> : $I = \emptyset$

alors n est un nombre impair donc il existe un entier naturel q tel que :

$$n = 2\,q + 1 = \ 2^0\ (2\,q + 1)$$

Donc n est l'image du couple $(0,q)$

<u>2^ème cas</u> : $I \neq \emptyset$

Alors I étant majoré par n, il possède un plus grand élément p. Ainsi, il existe un entier naturel m non divisible par 2 tel que :

$$n = \ 2^p\ m$$

m étant impair, se met sous la forme : $m = 2\,q + 1$

Ainsi :

$$n = \ 2^p\ (2\,q + 1)$$

Donc n est l'image du couple (p,q)

2) <u>Application réciproque</u>

L'étude de la surjectivité montre comment définir le couple antécédent $\big(p(n),q(n)\big)$ d'un entier naturel non nul n.

Si n est impair :

$$p(n) = 0, \qquad q(n) = \frac{n-1}{2}$$

Si n est pair :

$$p(n) = max\{m \in \mathbb{N}^* : \ \ 2^m\ divise\ n\}, \qquad q(n) = \Big(\frac{n}{2^{p(n)}} - 1\Big) : 2$$