Exercice 1

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Montrer qu'elle permet de définir une bijection sur un sous ensemble maximal de $\mathbb{R}$, et déterminer les expressions analytiques des applications réciproques

Exercice 2 :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = e^x - 2\, e^{-x} + 1$$

Montrer qu'elle permet de définir une bijection sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression analytique de l'application réciproque

Exercice 3 :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 - Ln(x)}$$

Montrer qu'elle permet de définir une bijection sur son domaine de définition et déterminer l'expression analytique de l'application réciproque

Exercice 4 :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = e^{x^2 - x}$$

Montrer qu'elle permet de définir deux bijections sur deux intervalles maximaux, et déterminer les expressions analytiques des applications réciproques

Solutions

Exercice 1 :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

f est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)}{\sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)} < 0 \text{ sur }]-\infty; -1[$$

Limites aux bornes infinies du domaine :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

f définit donc une bijection de $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ dans $[-1; 0[\cup [1; +\infty[$

Expression analytique de l'application réciproque :

$$\forall (x, y) \in \,]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\times [-1; 0[\cup [1; +\infty[:$$

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (y - x)^2 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \; y^2 - 2\,x\,y + x^2 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \; y^2 - 2\,x\,y + 1 = 0$$

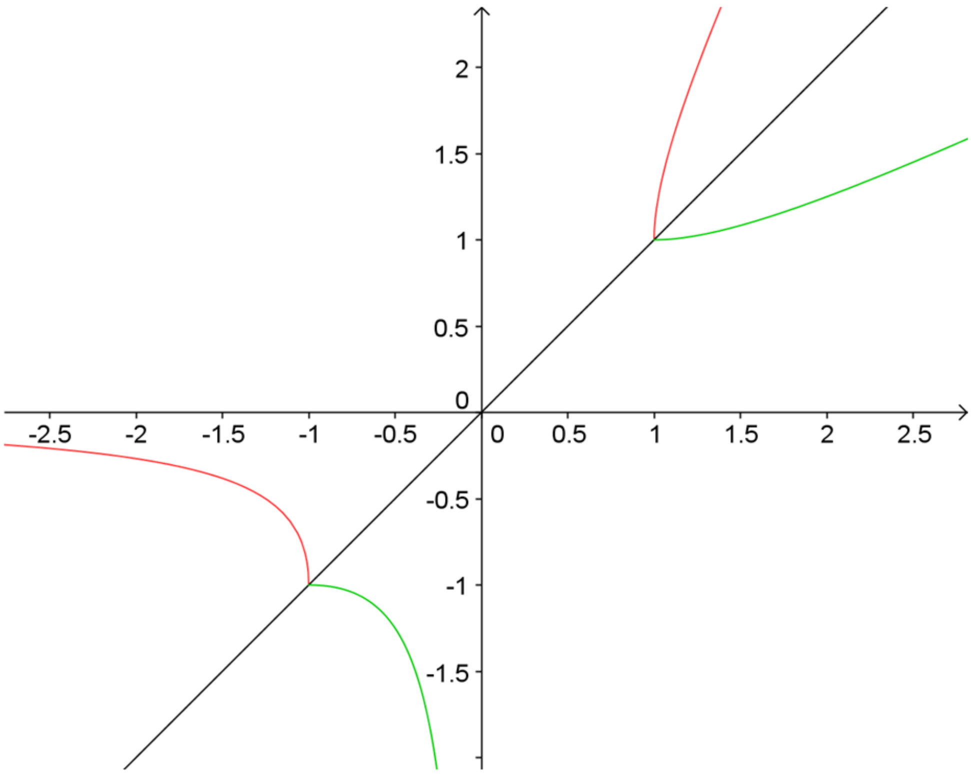
$$\Leftrightarrow \; y^2 + 1 = 2\,x\,y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2 + 1}{2\,y}$$

D’où :

$$\forall\, y \in [-1; 0[\; \cup [1; +\infty[\, : \; f^{-1}(y) = \frac{y^2 + 1}{2\,y}$$

Voici l’allure du graphique de f (en rouge) et de sa réciproque (en vert)



Exercice 2 :

$$f(x) = e^x - 2\,e^{-x} + 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = e^x + 2\,e^{-x} > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

f définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Expression analytique de l'application réciproque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$y = e^x - 2\,e^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow\ y - 1 = e^x - 2\,e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\ (y-1)e^x = (e^x)^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow\ (e^x)^2 - (y-1)e^x - 2\ = 0$$

On résout pour $t \in]0; +\infty[$:

$$t^2 - (y-1)t - 2\ = 0$$

$$\Delta = (y-1)^2 + 8 > 0$$

Le polynôme en t a deux racines distinctes :

$$t_1(y) = \frac{y - 1 - \sqrt{(y-1)^2 + 8}}{2}$$

$$t_2(y) = \frac{y - 1 + \sqrt{(y-1)^2 + 8}}{2}$$

Le produit des racines étant :

$$t_1(y)\, t_2(y) = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

Les racines sont de signe contraire. On en déduit :

$$t_2(y) > 0, \qquad t_1(y) < 0$$

La solution est donc $t_2(y)$

Ainsi :

$$y = e^x - 2\, e^{-x} + 1$$

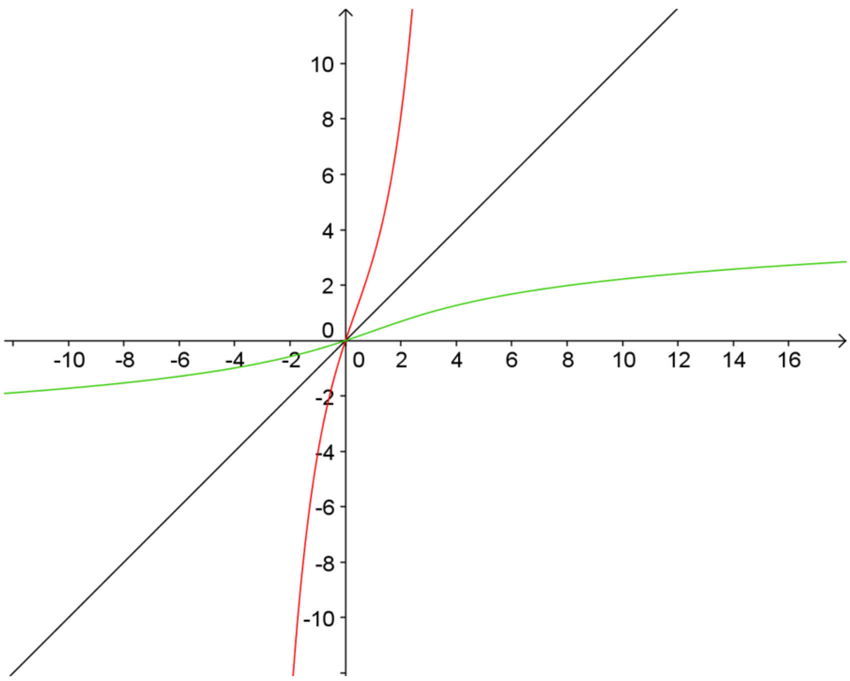
$$\Leftrightarrow\ e^x = \frac{y - 1 + \sqrt{(y-1)^2 + 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ x = Ln\left(\frac{y - 1 + \sqrt{(y-1)^2 + 8}}{2}\right)$$

D'où

$$\forall\, y \in \mathbb{R} :\ f^{-1}(y) = Ln\left(\frac{y - 1 + \sqrt{(y-1)^2 + 8}}{2}\right)$$

et les deux graphiques



Exercice 3 :

$$f(x) = \sqrt{1 - Ln(x)}$$

Les conditions de définition sont :

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - Ln(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 \geq Ln(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e \geq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ 0 < x \leq e$$

Le domaine de définition est donc :

$$D_f =]0; e]$$

f est dérivable sur $]0; e[$ par composition et :

$$f'(x) = -\frac{1}{2\,x\sqrt{1 - Ln(x)}} < 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$f(e) = 0$$

On en déduit le tableau de variations :

x	0		e
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

f définit donc une bijection de $]0; e]$ dans $]0; +\infty[$:

Expression analytique de l'application réciproque :

$$\forall (x, y) \in \,]0; e] \times]0; +\infty[:$$

$$y = \sqrt{1 - Ln(x)}$$

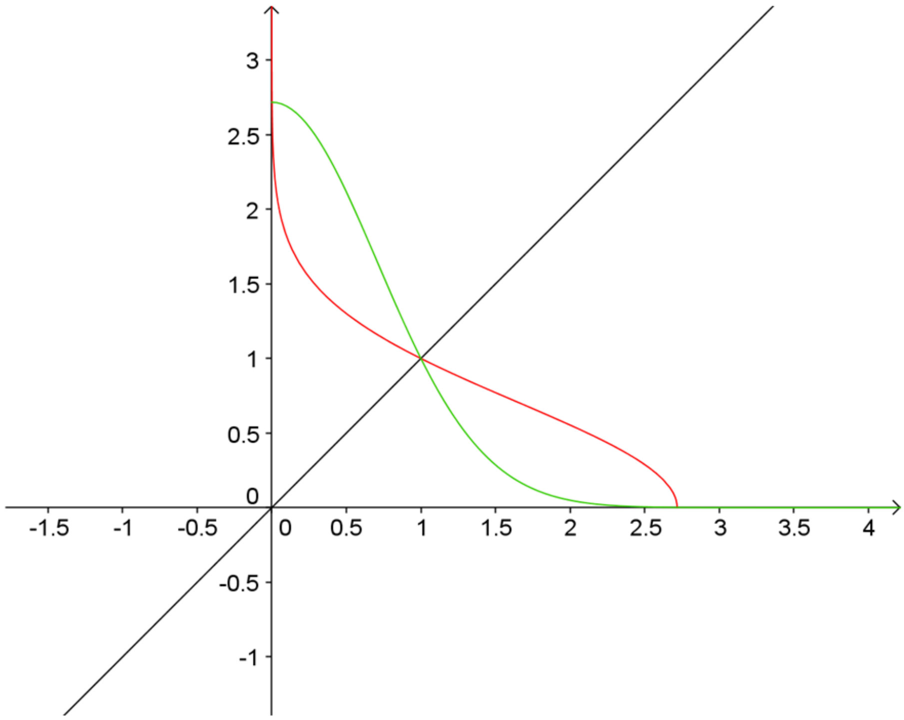
$$\Leftrightarrow \ y^2 = 1 - Ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \ Ln(x) = 1 - y^2$$

$$\Leftrightarrow \ x = e^{1-y^2}$$

On en déduit :

$$\forall\, y \in \,]0; +\infty[\ :\ f^{-1}(y) = e^{1-y^2}$$



Exercice 4 :

$$f(x) = e^{x^2 - x}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = (2\,x - 1)\, e^{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

f définit donc deux bijections :

$$f_1 : \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[$$

$$f_2 : \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow \left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[$$

Expression analytique des applications réciproques :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[:$$

$$y = e^{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow Ln(y) = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - Ln(y) = 0$$

$$\Delta = 1 + 4\,Ln(y) > 0$$

Le polynôme en x a donc deux racines distinctes :

$$x_1(y) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\,Ln(y)}}{2}$$

$$x_2(y) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\,Ln(y)}}{2}$$

Le produit des racines étant :

$$x_1(y)\,x_2(y) = \frac{c}{a} = \frac{-Ln(y)}{1} = -Ln(y) < 0$$

les racines sont de signe contraire. On en déduit :

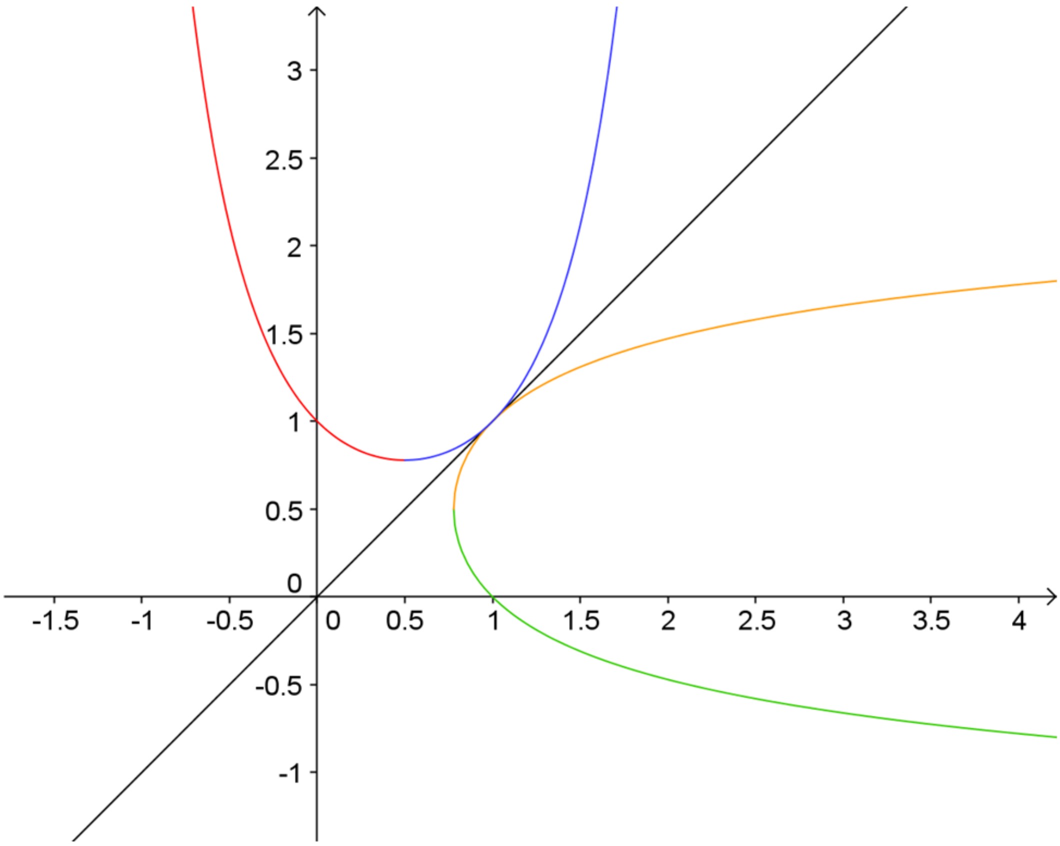
$$x_2(y) > 0, \qquad x_1(y) < 0$$

Ainsi :

$$\forall\, y \in \left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[\;:\; {f_1}^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\,Ln(y)}}{2}$$

$$:\; {f_2}^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\,Ln(y)}}{2}$$

Et les graphes de f_1 (en rouge) f_2 (en bleu) ${f_1}^{-1}$ (en vert) ${f_2}^{-1}$ (en orange)


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4