Résoudre les équations différentielles suivantes en déterminant les solutions maximales

1) $\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right) \boldsymbol{y}'-\mathbf{2}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{y}=\mathbf{2}\, \boldsymbol{x}$

2) $\left(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right) \boldsymbol{y}'-\ \boldsymbol{y}=\mathbf{0}$

3) $\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{y}'+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{ln}(|\boldsymbol{x}|)=\mathbf{0}$

4) $\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right) \boldsymbol{Atan}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{y}'+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$

5) $\boldsymbol{y}'-|\boldsymbol{y}|=\mathbf{0}$

6) $\boldsymbol{y}'-\left(\sqrt{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}-\mathbf{1}}\right) \boldsymbol{y}=\mathbf{0}$

Solution :

1) L'équation équivaut à :

$$y'=\frac{2\, x}{1+x^2} y+\frac{2\, x}{1+x^2}$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$

Posons :

$$a(x)=\frac{2\, x}{1+x^2}$$

Une primitive est :

$$A(x)=Ln(1+x^2)$$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc :

$$y=C\, e^{Ln(1+x^2)}=C\ (1+x^2), C \in \mathbb{R}$$

On recherche une solution particulière constante de l'équation complète et on trouve que $y=-1$ est solution. D'où la solution générale :

$$y=-1+C\ (1+x^2), C \in \mathbb{R}$$

2) sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ l'équation équivaut à :

$$y'=\frac{1}{1-x^2} y$$

Or une décomposition en éléments simples donne :

$$a(x)=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2} \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$

Une primitive est donc, sur chacun des sous intervalles précédents :

$$A(x)=\frac{1}{2}\, ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)=ln\left(\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\right)$$

La solution générale de l'équation est donc sur chaque sous intervalle :

$$y = C\,e^{A(x)} = C\,\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\ ,C \in \mathbb{R}$$

Reste à étudier s'il existe des solutions sur des intervalles plus grands. Soit y une solution sur $]-1,+\infty[$ alors y doit avoir une limite finie en 1. Ceci impose qu'elle soit identiquement nulle sur $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ donc sur $]-1,+\infty[$.

Soit y une solution sur $]-\infty,1[$ alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$\forall\, x \in\,]-\infty,-1[\,:\ y = C_1\,\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,:\ y = C_2\,\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

Par continuité en -1 on en déduit :

$$y(-1) = 0$$

Et pour $h \in\,]0,1[$:

$$\frac{y(-1+h)-y(-1)}{h} = C_2\ \frac{1}{h}\ \sqrt{\frac{h}{2-h}}$$

Et cette quantité doit avoir une limite finie quand h tend vers 0, ce qui impose $C_2 = 0$. Par un raisonnement analogue $C_1 = 0$. Donc y est identiquement nulle sur $]-1,+\infty[$.

3) sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ l'équation équivaut à :

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{1}{x}\ Ln(|x|)$$

Posons :

$$a(x) = -\frac{1}{x}$$

Une primitive est :

$$A(x) = Ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc sur chaque sous intervalle :

$$y = C\,e^{A(x)} = \frac{C}{|x|}\ \ ,C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

$$y_P = \frac{C(x)}{x}$$

$$y'_P = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

y_P est donc solution si et seulement si :

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\ Ln(|x|)$$

Soit :

$$C'(x) = Ln(|x|)$$

Donc :

$$C(x) = x\ Ln(|x|) - x$$

Soit :

$$y_P = Ln(|x|) - 1$$

D'où la solution générale sur chacun des deux sous intervalles :

$$y = \frac{C}{|x|} + Ln(|x|) - 1$$

4) sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ l'équation équivaut à :

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{Atan(x)}\,y + \frac{x}{1+x^2}\,\frac{1}{Atan(x)}$$

Posons :

$$a(x) = -\frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{Atan(x)} = -\frac{\big(Atan(x)\big)'}{Atan(x)}$$

Une primitive est :

$$A(x) = Ln\left(\frac{1}{|Atan(x)|}\right)$$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc sur chaque sous intervalle :

$$y = C\ e^{A(x)} = \frac{C}{|Atan(x)|}\ \ , C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

$$y_P = \frac{C(x)}{Atan(x)}$$

$$y'_P = \frac{C'(x)}{Atan(x)} - \frac{1}{1+x^2}\frac{C(x)}{(Atan(x))^2}$$

y_P est donc solution si et seulement si :

$$\frac{C'(x)}{Atan(x)} - \frac{1}{1+x^2}\frac{C(x)}{(Atan(x))^2} = -\frac{1}{1+x^2}\frac{C(x)}{(Atan(x))^2} + \frac{x}{1+x^2}\ \frac{1}{Atan(x)}$$

Soit :

$$C'(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Donc :

$$C(x) = \frac{1}{2} Ln(1 + x^2)$$

La solution générale de l'équation est donc sur chaque sous intervalle :

$$y = \frac{C}{|Atan(x)|} + \frac{1}{2} \frac{Ln(1 + x^2)}{Atan(x)}, C \in \mathbb{R}$$

Voyons s'il y a une solution sur $\mathbb{R}$.

L'existence d'une limite finie en 0 impose $C = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \; y = \frac{1}{2} \frac{Ln(1 + x^2)}{Atan(x)}$$

Et en 0 :

$$y \sim \frac{x^2}{2\,x} = \frac{x}{2}$$

Donc par continuité :

$$y(0) = 0$$

Voyons la dérivabilité. En 0 on a :

$$\frac{y(x)}{x} \sim \frac{1}{2}$$

Donc y est dérivable en 0 et :

$$y'(0) = \frac{1}{2}$$

On a ensuite :

$$(1 + 0^2)\, Atan(0)\, y'(0) + y(0) = 0$$

Donc y est bien solution sur $\mathbb{R}$

5) Cherchons les solutions non identiquement nulles.

Soit I un intervalle tel qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) > 0$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 \in I$ tel que $x_0 < x_1$ et $y(x_1) < 0$

Alors par la propriété de la valeur intermédiaire, il existe $x_2 \in I$ tel que $x_0 < x_2 < x_1$ et $y(x_2) = 0$

Soit donc :

$$x_3 = inf\{x \in \;]x_0, x_1[\; : y(x) = 0\}$$

Par continuité :

$$y(x_3) = 0$$

Donc sur $]x_0, x_3[$ y ne s'annule pas et est donc de signe constant, celui de $y(x_0)$.

Et sur $[x_0, x_3]$ y vérifie $y' = y$ donc est de la forme :

$$y = C\, e^{x}$$

Donc $C = 0$ et $y(x_0) = 0$ ce qui est absurde.

Donc y est strictement positive sur I

Par un raisonnement analogue, on montre que si y prend une valeur strictement négative sur un intervalle alors elle est strictement négative sur cet intervalle.

Les solutions maximales sont donc de signe constant.

Les solutions de signe strictement positif sont définies sur $\mathbb{R}$ par les solutions de $y' = y$ soit :

$$y = C\, e^{x}, C > 0$$

Les solutions de signe strictement négatif sont définies sur $\mathbb{R}$ par les solutions de $y' = -y$ soit :

$$y = C\, e^{-x}, C < 0$$

Et il y a la solution identiquement nulle.

6) L' équation est définie sur $[0, +\infty[$

Posons sur $]0, +\infty[$:

$$u = \sqrt{e^{x} - 1}$$

$$u^2 = e^{x} - 1$$

$$2\, u\, u' = e^{x} = u^2 + 1$$

$$\sqrt{e^{x} - 1} = u\, \frac{2\, u\, u'}{u^2 + 1} = \frac{2\, u^2\, u'}{u^2 + 1} = \frac{2\, (u^2 + 1 - 1)\, u'}{u^2 + 1} = 2\, u' - \frac{2\, u'}{u^2 + 1}$$

Une primitive de $\sqrt{e^{x} - 1}$ est donc :

$$A(x) = 2\, u - 2\, Atan(u) = 2\, \sqrt{e^{x} - 1} - 2\, Atan\left(\sqrt{e^{x} - 1}\right)$$

La solution générale est donc sur $]0, +\infty[$:

$$y = C\, e^{2\, \sqrt{e^{x}-1} - 2\, Atan\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)}$$

Elle a bien une limite en 0 et peut être prolongée en 0 par continuée en posant $y(0) = C$ et si $C \neq 0$, nous avons en 0 :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = C\, \frac{e^{2\, \sqrt{e^{x}-1} - 2\, Atan\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)} - 1}{x} \sim \frac{2\, \sqrt{e^{x} - 1} - 2\, Atan\left(\sqrt{e^{x} - 1}\right)}{x}$$

Posons :

$$\sqrt{e^{x} - 1} = t$$

Alors, par un développement limité en 0 :

$$2\, t - 2\, Atan(t) = 2\, \big(t - Atan(t)\big) = 2\, \left(t - \left(t - \frac{1}{3}\, t^3 + o(t^3)\right)\right) \sim \frac{2}{3}\, t^3$$

Donc :

$$\frac{y(x)-y(0)}{x} \sim \frac{2}{3}\frac{\sqrt{e^x-1}^3}{x} \sim \frac{2}{3}\frac{\sqrt{x}^3}{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

Donc y est dérivable à droite en 0 et $y'(0) = 0$. De plus :

$$y'(0) = \sqrt{e^0 - 1}\, y(0)$$

Donc le prolongement sur $[0, +\infty[$ est bien solution.

Remarque : Sur geogebra , nous avons tracé les différentes fonctions intervenant dans l'expression de y. On voit que bien que $\sqrt{e^x-1}$ et $Atan\left(\sqrt{e^x-1}\right)$ ne sont pas dérivables en 0 (ce qui se traduit par une tangente verticale sur le graphique) la différence des deux fonctions l'est (tangente horizontale en 0)