Enoncé

Soit l'équation différentielle sur $[\mathbf{0}, +\infty[$:

$$\boldsymbol{y'(t) = y(t)^2} \quad (\boldsymbol{E})$$

On s'intéresse aux solutions sur des intervalles de la forme $[\mathbf{0}, \boldsymbol{a}[$ avec $\boldsymbol{a} > 0$ telles que $\boldsymbol{y(0) = y_0}$. Une solution correspondant à une valeur de $\boldsymbol{a}$ la plus grande possible est alors appelée solution maximale. Sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz :

1) **Déterminer en montrant qu'elle est unique la solution maximale telle que $\boldsymbol{y(0)} > 0$**
2) **Déterminer en montrant qu'elle est unique la solution maximale telle que $\boldsymbol{y(0) < 0}$**
3) **Déterminer en montrant qu'elle est unique la solution maximale telle que $\boldsymbol{y(0) = 0}$**

Solution

1) Soit y une solution sur $[0, a[$ avec $a > 0$ telle que $y(0) = y_0 > 0$ alors, y^2 étant continue, pour tout $t \in [0, a[$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0, t]$. Ainsi, en intégrant l'équation différentielle, on obtient :

$$\int_0^t y'(u)\,du = \int_0^t y^2(u)\,du$$

soit :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t y^2(u)\,du$$

Il en résulte pour tout $t \in [0, a[$:

$$y(t) > 0$$

donc :

$$\forall\, t \in [0, a[\,:\; \frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} :\; \forall\, t \in [0, a[\,:\; -\frac{1}{y(t)} = t + c$$

La constante c se détermine par condition initiale :

$$-\frac{1}{y(0)} = 0 + c$$

soit $\forall\, t \in [0, a[$

$$-\frac{1}{y(t)} = t - \frac{1}{y_0}$$

Finalement :

$$\boxed{y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0\, t}}$$

Mais la solution, pour être valide, doit satisfaire la condition $y(t) > 0$ soit :

$$1 - y_0\, t > 0$$
$$t < \frac{1}{y_0}$$

On en déduit la solution maximale correspondant à :

$$\boxed{a = \frac{1}{y_0}}$$

2) Soit y une solution sur $[0, a[$ telle que $y(0) = y_0 < 0$ Montrons par l'absurde qu'elle ne s'annule pas. Soit c la borne supérieure des réels b de $[0, a[$ pour lesquels on a $y(t) < 0$ sur $[0, b[$ et supposons $c < a$. Alors on a $y(t) < 0$ sur $[0, c[$ et il existe un réel d tel que $c < d < a$ on a $y(t) \geq 0$ sur $[c, d[$. Par continuité et passage à la limite en c on en déduit $y(c) = 0$. Or par intégration analogue au cas 2) sur $[0, c[$ on a :

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0\, t}$$

Donc :

$$y(c) = \frac{y_0}{1 - y_0\, c} < 0$$

ce qui est contradictoire.

Or la fonction précédente est solution de l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$. C'est donc la solution maximale.

3) Soit y une solution sur $[0, a[$ avec $a > 0$ telle que $y(0) = 0$. Comme traité au 2) on a par intégration :

$$y(t) = \int_0^t y^2(u)\, du$$

On en déduit $y(t) \geq 0$ sur $[0, a[$. Montrons par l'absurde que y est identiquement nulle en supposant l'existence d'un réel b tel que $0 < b < a$ et $y(b) > 0$. Soit c la borne inférieure de tels réels b. Distinguons deux cas :

1er cas : $c = 0$

Dans ce cas on déduit par le fait que y est croissante, $y(t) > 0$ sur $]0, a[$ et par intégration :

$$\exists\, c \in \mathbb{R} :\ \forall\, t \in\,]0, a[\ :\ -\frac{1}{y(t)} = t + c$$

Le passage à la limite en 0 conduit alors à une absurdité

2ème cas : $0 < c < a$

On déduit que $y(t) = 0$ sur $]0, c[$ et $y(t) > 0$ sur $]c, a[$ d'où par intégration :

$$\exists\, k \in \mathbb{R} : \ \forall\, t \in\,]c, a[\ : \ -\frac{1}{y(t)} = t + k$$

Or par continuité on a aussi $y(c) = 0$ ce qui amène une contradiction par passage à la limite à droite en c dans l'équation précédente.