Enoncé

Soit l'équation différentielle :

$$\mathbf{2\,(x-1)\,y' + y = x^2 + x \quad (E)}$$

1) **Déterminer une solution polynomiale de l'équation (E)**
2) **En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$?**
3) **Déterminer la solution de (E) sur un intervalle maximal telles que $y(0) = 0$**
4) **En déduire le développement limité à l'ordre 3 de cette dernière**

Solution

1) La forme du second membre suggère de chercher un polynôme de même degré, soit de la forme :

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donc :

$$P'(x) = 2a\,x + b$$

La condition nécessaire et suffisante pour que P soit solution est :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\quad 2\,(x-1)\,(2a\,x+b) + a\,x^2 + b\,x + c = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \;:\quad 5\,a\,x^2 + (3\,b - 4\,a)\,x + c - 2\,b = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\,a = 1 \\ 3\,b - 4\,a = 1 \\ c - 2\,b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{5} \\ b = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{5} \\ c = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Le polynôme solution est donc :

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{5}\,x^2 + \frac{3}{5}\,x + \frac{6}{5}}$$

2) Sur $]-\infty; 1[$ ou $]1; +\infty[$ l'équation différentielle est équivalente à la suivante :

$$y' + \frac{1}{2\,(x-1)}y = \frac{x^2 + x}{2\,(x-1)}$$

Et le polynôme précédent en est une solution particulière. Or l'équation homogène associée a pour solution générale :

$$y = c\, e^{-\frac{1}{2} Ln\,|x-1|} = \frac{c}{\sqrt{|x-1|}}$$

c étant un réel arbitraire.

Sur chacun des deux intervalles la solution générale de l'équation complète est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{5}\, x^2 + \frac{3}{5}\, x + \frac{6}{5} + \frac{c}{\sqrt{|x-1|}}$$

Or, si $c \neq 0$, cette solution n'admet pas de limite en 1 que ce soit par valeur inférieure ou supérieure. Le polynôme P est donc la seule solution sur $\mathbb{R}$.

3) L'intervalle maximal devant contenir 0, il ne peut être que $]-\infty; 1[$. La condition $y(0) = 0$ se traduit par l'équation :

$$\frac{6}{5} + \frac{c}{\sqrt{|-1|}} = 0$$

Soit :

$$c = -\frac{6}{5}$$

Ainsi la solution est :

$$\boxed{y = \frac{1}{5}\, x^2 + \frac{3}{5}\, x + \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}$$

4) Le développement limité en 0 se déduit de :

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\, t + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\, t^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}\, t^3 + o(t^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\, t + \frac{3}{8}\, t^2 - \frac{15}{48}\, t^3 + o(t^3)$$

soit :

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8}\, x^2 + \frac{15}{48}\, x^3 + o(x^3)$$

Donc :

$$y = \frac{1}{5}\,x^2 + \frac{3}{5}\,x + \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{15}{48}\,x^3 + o(x^3)\right)$$

Finalement :

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{8}\,x^3 + o(x^3)}$$