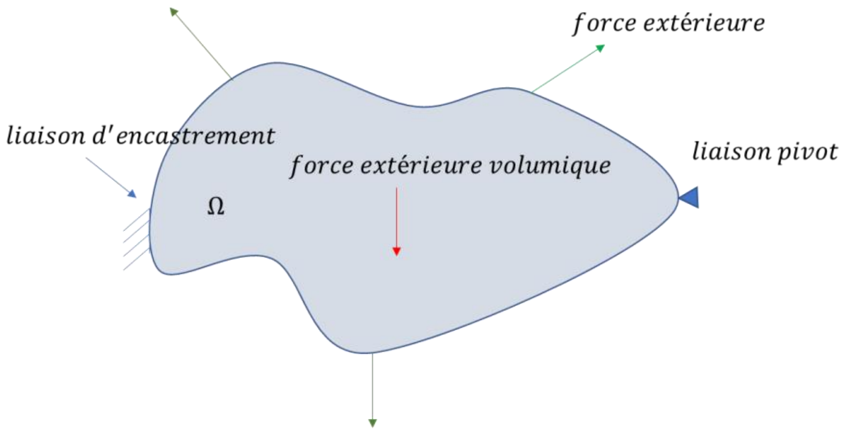
Contraintes principales -Cercles de Mohr

1) Contraintes principales – Directions principales

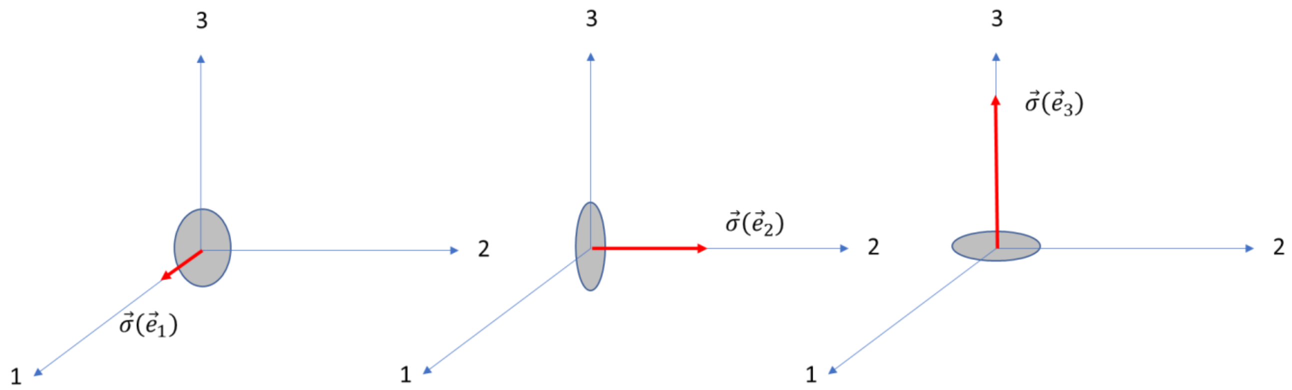


Soit un milieu continu Ω soumis sur sa surface extérieure à un ensemble de forces ponctuelles, linéiques ou surfaciques et dans son intérieur, à des forces volumiques qui le mettent dans un équilibre bien défini, ce qui signifie, d'une part que le torseur associé à ces forces est le torseur nul, d'autre part qu'il existe une unique solution de par les liaisons cinématiques imposées à ce milieu, liaisons d'encastrement, liaisons pivots, liaisons rotule, etc (une ou plusieurs composantes de déplacement ou de rotations nulle en différents points).

Alors, en tout point M de ce milieu, toute facette de normale arbitraire $\vec{n}$ sépare le milieu continu en deux régions, une du côté pointé par $\vec{n}$, l'autre du côté opposé.

Il existe en ce point une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et trois nombres réels $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tels que $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ et :

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_1) = \sigma_1\, \vec{e}_1, \qquad \vec{\sigma}(\vec{e}_2) = \sigma_2\, \vec{e}_2\,, \qquad \vec{\sigma}(\vec{e}_3) = \sigma_3\, \vec{e}_3$$



Auquel cas, la relation d'équilibre local donne pour un vecteur unitaire quelconque $\vec{n} = \alpha_1\, \vec{e}_1 + \alpha_2\, \vec{e}_2 + \alpha_3\, \vec{e}_3$:

$$\boxed{\vec{\sigma}(\vec{n}) = \alpha_1\, \sigma_1\, \vec{e}_1 + \alpha_2\, \sigma_2\, \vec{e}_2 + \alpha_3\, \sigma_3\, \vec{e}_3}$$

La contrainte normale s'en déduit :

$$\boxed{\vec{\sigma}_n(\vec{n}) = (\vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot \vec{n})\ \vec{n} = ({\alpha_1}^2\, \sigma_1 + {\alpha_2}^2\, \sigma_2 + {\alpha_3}^2\, \sigma_3)\, \vec{n}}$$

2) <u>Cercles de Mohr</u>

Notons que l'on a les 3 relations :

$$(\vec{\sigma}(\vec{n}) - \sigma_1\ \vec{n}) \cdot (\vec{\sigma}(\vec{n}) - \sigma_2\ \vec{n}) = {\alpha_3}^2\, (\sigma_3 - \sigma_1)\, (\sigma_3 - \sigma_2)\ \geq 0$$

$$(\vec{\sigma}(\vec{n}) - \sigma_2\ \vec{n}) \cdot (\vec{\sigma}(\vec{n}) - \sigma_3\ \vec{n}) = {\alpha_1}^2\, (\sigma_1 - \sigma_2)\, (\sigma_1 - \sigma_3)\ \geq 0$$

$$(\vec{\sigma}(\vec{n}) - \sigma_3\ \vec{n}) \cdot (\vec{\sigma}(\vec{n}) - \sigma_1\ \vec{n}) = {\alpha_1}^2\, (\sigma_2 - \sigma_3)\, (\sigma_2 - \sigma_1)\ \leq 0$$

Dans le cas où $\vec{n}$ n'est pas un vecteur de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la contrainte $\sigma(\vec{n})$ ne lui est pas colinéaire. On peut ainsi considérer le plan $\left(M, \vec{n}, \sigma(\vec{n})\right)$ et y placer les points N, M_1, M_2, M_3 tels que :

$$\overrightarrow{MN} = \vec{\sigma}(\vec{n}), \qquad \overrightarrow{MM_1} = \sigma_1\ \vec{n}, \quad \overrightarrow{MM_2} = \sigma_2\ \vec{n}, \quad \overrightarrow{MM_3} = \sigma_3\ \vec{n}$$

Les 3 relations précédentes se traduisent alors par :

$$\overrightarrow{M_1N} \cdot \overrightarrow{M_2N} \geq 0$$

$$\overrightarrow{M_2N} \cdot \overrightarrow{M_3N} \geq 0$$

$$\overrightarrow{M_3N} \cdot \overrightarrow{M_1N} \leq 0$$

Soit en termes d'angles :

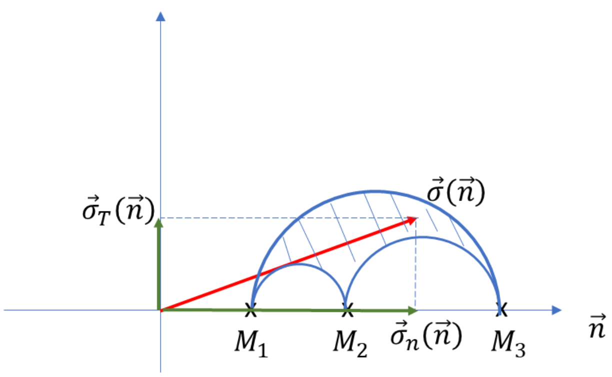
$$\widehat{M_1NM_2} \leq 90°$$

$$\widehat{M_2NM_3} \leq 90°$$

$$\widehat{M_1NM_3} \geq 90°$$

Cela permet de situer le point N dans une région située en dehors des cercles de diamètres $[M_1M_2]$ et $[M_2M_3]$ et à l'intérieur du cercle de diamètre $[M_1M_3]$.

En pratique, on représente seulement une demi-région associée à des demi-cercles, dits cercles de Mohr, en se plaçant dans le demi plan formé par la base $\left(\vec{\sigma}_n(\vec{n}), \vec{\sigma}_T(\vec{n})\right)$ où $\vec{\sigma}_T(\vec{n}) = \vec{\sigma}(\vec{n}) - \vec{\sigma}_n(\vec{n})$ est la contrainte tangentielle (de cisaillement)



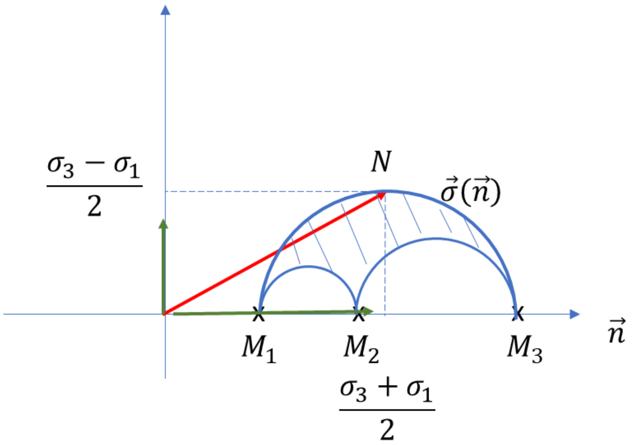
3) <u>Contrainte tangentielle maximale</u>

La région hachurée définie par les (demi) cercles de Mohr fait apparaitre un point N situé au sommet du demi-cercle de diamètre $[M_1 M_3]$ et pour lequel la norme τ de la contrainte tangentielle $\vec{\sigma}_T(\vec{n})$ a une valeur maximale égale au rayon de ce demi-cercle, à savoir :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

et pour laquelle la contrainte normale est :

$$\vec{\sigma}_n(\vec{n}) = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\,\vec{n}$$



Déterminons alors pour quelle normale $\vec{n}$ cette contrainte est obtenue. Pour cela, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \\ \|\vec{\sigma}(\vec{n})\|^2 = \left(\dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 \\ \|\vec{n}\|^2 = 1 \end{cases}$$

ce qui se traduit sur les coordonnées de $\vec{n}$ par :

$$\begin{cases} {\alpha_1}^2\,\sigma_1 + {\alpha_2}^2\,\sigma_2 + {\alpha_3}^2\,\sigma_3 = \dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \\ {\alpha_1}^2\,{\sigma_1}^2 + {\alpha_2}^2\,{\sigma_2}^2 + {\alpha_3}^2\,{\sigma_3}^2 = \left(\dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 \\ {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2 = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} {\alpha_1}^2\,\sigma_1 + {\alpha_2}^2\,\sigma_2 + {\alpha_3}^2\,\sigma_3 = \dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \\ {\alpha_1}^2\,{\sigma_1}^2 + {\alpha_2}^2\,{\sigma_2}^2 + {\alpha_3}^2\,{\sigma_3}^2 = \dfrac{{\sigma_3}^2 + {\sigma_1}^2}{2} \\ {\alpha_1}^2 = 1 - {\alpha_2}^2 - {\alpha_3}^2 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\alpha_2{}^2\,(\sigma_2-\sigma_1)+\alpha_3{}^2\,(\sigma_3-\sigma_1)=\dfrac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\\
\alpha_2{}^2\,(\sigma_2{}^2-\sigma_1{}^2)+\alpha_3{}^2\,(\sigma_3{}^2-\sigma_1{}^2)=\dfrac{\sigma_3{}^2-\sigma_1{}^2}{2}\\
\alpha_1{}^2=1-\alpha_2{}^2-\alpha_3{}^2
\end{cases}
$$

On vérifie alors aisément que ce système admet pour solution :

$$
\alpha_1=\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \alpha_2=0
$$

ce qui donne pour vecteur normal :

$$
\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_3
$$

qui est un vecteur dans le plan orienté $(\vec{e}_1,\vec{e}_3)$ tel que l'angle $(\vec{e}_1,\vec{n})=\frac{\pi}{4}$