Corrigé sujet 2017

Exercice 1

1) soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$x\, e_1' + y\, e_2' + z\, e_3' = 0 \Leftrightarrow x \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z - z + z = 0 \\ y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

La famille (e_1', e_2', e_3') est libre dans un espace de dimension 3, c'est donc une base.

La matrice de passage de la base canonique à cette base est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons son inverse en inversant le système associé :

$$\begin{cases} x + y + z = x' & L_1 \\ y + z = y' & L_2 \\ x + z = z' & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - y' & L_1 - L_2 \\ y + z = y' & L_2 \\ z = -x' + y' + z' & L_3 + L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' - z' \\ z = -x' + y' + z' \end{cases}$$

Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie $P^{-1}\, P = I_3$

Remarque : La première étape peut être omise, car si montrer que P est inversible suffit à affirmer que ses colonnes sont libres et donc que la famille (e_1', e_2', e_3') est libre.

Calculons A' en utilisant la relation : $A' = P^{-1} A P$.

$$A\,P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$N' = A' - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous reconnaissons une matrice nilpotente (car triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale).

En effet :

$$N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N'^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus précisément N' est nilpotente d'ordre 2.

Or :

$$A = P\,A'\,P^{-1}$$

Donc :

$$N = A - I_3 = P\,(A' - I_3)\,P^{-1} = P\,N'\,P^{-1}$$

Et :

$$N^3 = P\,N'^3\,P^{-1} = P\,0\,P^{-1} = 0$$

Comme $N^2 = P\,N'^2\,P^{-1} \neq 0$, N est également nilpotente d'ordre 2.

3) Comme N et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (N + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

Or, par une récurrence triviale, on a pour tout $k \geq 3$: $N^k = 0$ donc pour $n \geq 2$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k = I_3 + n\,N + \frac{n\,(n-1)}{2} N^2$$

Où :

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - n - \dfrac{n\,(n-1)}{2} & 2\,n + \dfrac{n\,(n-1)}{2} & n + \dfrac{n\,(n-1)}{2} \\ -n & 1 + n & n \\ -\dfrac{n\,(n-1)}{2} & \dfrac{n\,(n-1)}{2} & 1 + \dfrac{n\,(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

Et on vérifie que ces expressions restent valables pour $n = 0$ et $n = 1$ sachant $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$

Exercice 2 :

1) Considérons la fonction suivante

$$f(a) = b, \qquad f(x) = a \ \ sur\ ]a, b]$$

L'ensemble F est alors vide

2) Considérons la fonction suivante

$$f(x) = x\ sur\ [c, d], \qquad f(x) = c\ \ sur\ [a, c[, \qquad f(x) = d\ \ sur\ ]d, b]$$

L'ensemble F est alors $[c, d]$

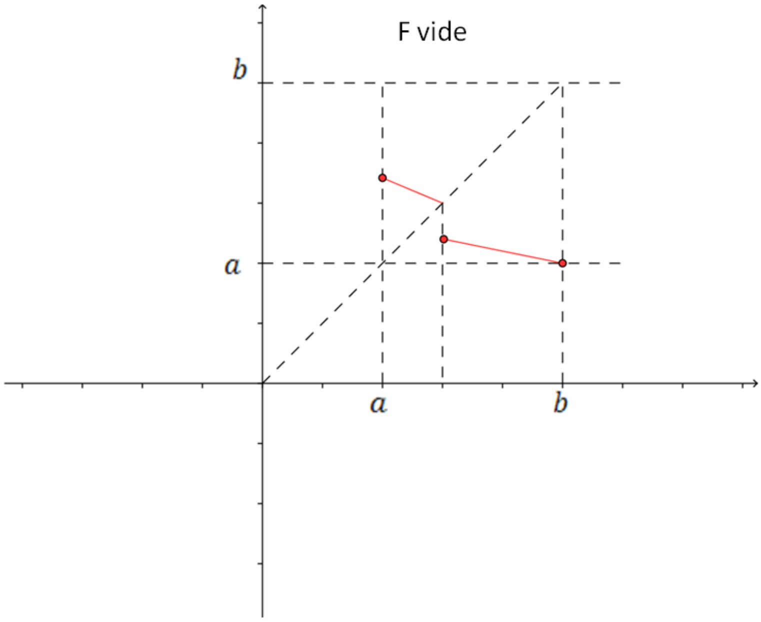
Si $[c, d] \neq [a, b]$ il n'y a pas unicité, il suffit de considérer la fonction

$$f\ affine\ sur\ [a, c]\ \ et\ [d, b]\ et\ \ f(a) = d, f(c) = c, f(d) = d\ f(b) = c,$$

$$f(x) = x\ sur\ ]c, d[$$

Si $[c,d] = [a,b]$ il y a unicité

3) Des exemples simples montrent que F peut être vide ou bien réduit à un point.



Montrons qu'il n'y a pas d'autres cas par l'absurde en supposant que F n'est pas vide.
Il existe alors un réel c de $[a,b]$ tel que $f(c) = c$. Considérons alors sur $[a,b]$ la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - x$$

Cette fonction est une somme de deux fonctions strictement décroissante, elle est donc strictement décroissante et elle s'annule en c.
Supposons par l'absurde que $c = a$. Alors $f(a) = a$ et pour $x > a$: $f(x) < f(a) = a$ donc $f(x) \notin [a,b]$. Ceci est absurde. Distinguons alors deux cas :

<u>1er cas : $a < c < b$</u> :

Sur $[a,c[$: $g(x) > g(c) = 0$ donc $f(x) > x$ d'où $x \notin F$
Sur $]c,b]$: $g(x) < g(c) = 0$ donc $f(x) < x$ d'où $x \notin F$

Donc $F = \{c\}$

<u>2ème cas $c = b$</u> :

Sur $[a,b[$: $g(x) > g(b) = 0$ donc $f(x) > x$ d'où $x \notin F$

Donc $F = \{b\}$

4) Nous avons :

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Donc :

$$0 \in [g(b), g(a)]$$

Or g est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ soit $f(c) = c$. Donc F n'est pas vide.

5) Considérons l'ensemble :

$$E = \{x \in [a, b] : g(x) > 0\}$$

Si E est vide alors $g(a) \leq 0$ donc $a \leq f(a) \leq a$ d'où $f(a) = a$ et F n'est pas vide

Si E n'est pas vide, alors, E étant majoré, il admet une borne supérieure. Notons la c et montrons $c > a$ en supposant par l'absurde $c = a$. On aurait alors $g(x) \leq 0$ sur $]a, b]$ donc $f(a) \leq f(x) \leq x$ sur $]a, b]$ d'où :

$$\forall\, x \in\,]a, b] : \ a \leq f(a) \leq x$$

En faisant tendre x vers a on en déduit par passage à la limite :

$$f(a) = a$$

et F est vide ce qui est contradictoire.

Distinguons alors deux cas :

1er cas : $a < c < b$:
Introduisons une suite (a_n) de points de E dont c est la limite.
On peut ensuite construire une suite (b_n) de points majorant c, ayant pour limite c et n'appartenant pas à E de la façon suivante :
Pour tout entier naturel non nul n, $c + 1/n$ est un majorant de E strictement supérieur à c, donc il existe un réel b_n n'appartenant pas à E tel que :

$$c \leq b_n \leq c + \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes montre que la suite (b_n) a pour limite c.
Nous avons alors :

$$g(a_n) > 0, \qquad g(b_n) \leq 0$$

Donc :

$$a_n < f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n) \leq b_n$$

En particulier :

$$a_n < f(c) \leq b_n$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$c \leq f(c) \leq c$$

Donc :

$$f(c) = c$$

Ainsi F n'est pas vide

2ème cas : $c = b$:

Introduisons une suite (a_n) de points de E dont b est la limite. On a alors :

$$a_n < f(a_n) \leq f(b) \leq b$$

En particulier :

$$a_n < f(b) \leq b$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$b \leq f(b) \leq b$$

Donc :

$$f(b) = b$$

Ainsi F n'est pas vide

<u>Exercice 3 :</u>

1) On a :

Pour $x \in]0,1[$: $\quad 0 < x^2 < x < 1$

Pour $x \in]1,+\infty[$: $\quad 1 < x < x^2$

Donc sur l'intervalle d'intégration la fonction à intégrer est définie et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en particulier intégrable au sens de Riemann.

2) Sur $]0,1[$ on a :

$$f(x) = \int_{0,5}^{x^2} \frac{1}{Ln(t)}\, dt - \int_{0,5}^{x} \frac{1}{Ln(t)}\, dt$$

Et sur $]1,+\infty[$

$$f(x) = \int_{2}^{x^2} \frac{1}{Ln(t)}\, dt - \int_{2}^{x} \frac{1}{Ln(t)}\, dt$$

On peut donc dériver f sur ces deux intervalles par composition. Ainsi :

$$f'(x) = 2\,x\ \frac{1}{Ln(x^2)} - \frac{1}{Ln(x)} = \frac{x-1}{Ln(x)} > 0$$

f est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$

3) En utilisant la première formule de la moyenne, la fonction à intégrer étant continue sur son intervalle d'intégration, il existe un réel $c(x) \in [x^2, x]$ si $x \in]0,1[$ et $c(x) \in [x, x^2]$ si $x \in]1,+\infty[$ tel que :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{Ln(t)}\,dt = \frac{1}{Ln(c(x))}\,(x^2 - x)$$

Donc sur $]0,1[$:

$$Ln(x^2) \leq Ln(c(x)) \leq Ln(x)$$

Soit :

$$2\,\frac{Ln(x)}{x} \leq \frac{Ln(c(x))}{x} \leq \frac{Ln(x)}{x}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Ln(x)}{x} = -\infty$$

Donc, par comparaison :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Ln(c(x))}{x} = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{Ln(c(x))} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{Ln\big(c(x)\big)}(x-1) = 0}$$

Sur $]1,+\infty[$:

$$Ln(x) \leq Ln(c(x)) \leq Ln(x^2)$$

Soit :

$$\frac{Ln(x)}{x} \leq \frac{Ln(c(x))}{x} \leq 2\frac{Ln(x)}{x}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Ln(x)}{x} = 0^+$$

Donc, par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Ln(c(x))}{x} = 0^+$$

Et :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{Ln(c(x))} = +\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{Ln\big(c(x)\big)}(x-1) = +\infty}$$

4) g est bien définie sur $\mathcal{D}$ par les mêmes arguments qu'au 1) et on note qu'en posant : $u = Ln(t)$ on a :

$$\frac{1}{t\ Ln(t)} = \frac{u'}{u}$$

Dont une primitive est $Ln(|u|)$. Ainsi :

$$g(x) = [Ln|Ln(t)|]_x^{x^2} = Ln|Ln(x^2)| - Ln|Ln(x)| = Ln\left(\frac{|2\ Ln(x)|}{|Ln(x)|}\right) = Ln(2)$$

5) On a sur $\mathcal{D}$:

$$f(x) - g(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{Ln(t)} - \frac{1}{t\ Ln(t)}\right) dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{Ln(t)}\ \frac{1}{t}\ dt$$

Posons :

$$h(t) = \frac{t-1}{Ln(t)}\ \frac{1}{t}$$

Cette fonction ayant pour limite 1 quand t tend vers 1 elle est prolongeable par continuité en 1 sur $]0, +\infty[$ et son prolongement $\bar{h}$ est intégrable au sens de Riemann sur tout sous intervalle fermé borné de $]0, +\infty[$. Ainsi, sur $\mathcal{D}$:

$$f(x) - g(x) = \int_x^{x^2} \bar{h}(t)\ dt = \int_1^{x^2} \bar{h}(t)\ dt - \int_1^{x} \bar{h}(t)\ dt$$

On en déduit, par composition :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - g(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) - g(x) = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = Ln(2)}$$

f est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et son prolongement a pour valeur 0 en 0 et $Ln(2)$ en 1.

6) Posons :

$$k(x) = \frac{x-1}{Ln(x)}$$

k est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$ et sur $\mathcal{D}$ on a :

$$f'(x) = k(x)$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} k(x) = 1$$

Or f (identifiée à son prolongement continu) est continue en 1. En utilisant le théorème des accroissements finis, on en déduit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 1$. Ainsi f' et k coïncident sur $]0, +\infty[$.

Or sur $]-1,1[$, la fonction $Ln(1+t)$ est développable en série entière et classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$Ln(1+t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k}$$

Donc sur $]0,2[$:

$$Ln(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

$$\frac{Ln(x)}{x-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^{k-1}}{k}$$

Et, par composition, cette dernière fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,2[$ et comme elle ne s'annule pas sur cet intervalle, son inverse k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,2[$.

Ainsi, f' et donc f sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,2[$. Or f' et donc f sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

<u>Exercice 4 :</u>

1) La fonction $tan(t)$ est définie et continue sur $[0,\pi/2[$ donc sur $[0,a]$ et donc elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0,a]$. De plus :

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^a \left(tan^{n+1}(t) - tan^n(t)\right) dt = \int_0^a tan^n(t)\,(tan(t) - 1)\, dt$$

En outre

$$a_{n+2} + a_n = \int_0^a \left(tan^{n+2}(t) + tan^n(t)\right) dt = \int_0^a tan^n(t)\,(tan^2(t) + 1)\, dt$$

$$= \left[\frac{tan^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^a$$

soit

$$a_{n+2} + a_n = \frac{tan^{n+1}(a)}{n+1}$$

Distinguons alors deux cas :

<u>1er cas : $a \in [0,\pi/4]$</u> :

Dans ce cas on a : $tan(t) - 1 \leq 0, tan^n(t) \geq 0$ sur $[0,a]$ et donc $a_{n+1} - a_n \leq 0$

De plus : $a_n \geq 0$. La suite (a_n) est donc décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente vers une limite finie L. La suite extraite (a_{n+2}) converge également vers L. Or :

$$0 \leq \frac{tan^{n+1}(a)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{tan^{n+1}(a)}{n+1} = 0$$

Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on déduit :

$$L + L = 0$$

Soit :

$$L = 0$$

<u>2$^{\text{ème}}$ cas : $a \in]\pi/4, \pi/2[$</u> :

Rappelons que l'on a sur a sur $[0, \pi/2[$: $tan(t) \geq t$

$$a_n = \int_0^{\pi/4} tan^n(t)\, dt + \int_{\pi/4}^{a} tan^n(t)\, dt \geq \int_0^{\pi/4} tan^n(t)\, dt + \int_{\pi/4}^{a} t^n\, dt$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/4} tan^n(t)\, dt = 0$$

$$\int_{\pi/4}^{a} t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{\pi/4}^{a} = \frac{a^{n+1} - (\pi/4)^{n+1}}{n+1} \sim \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\pi/4}^{a} t^n\, dt = +\infty$$

Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

2) On a :

$$a_{n+2} + a_n = \frac{1}{n+1}$$

3) Déjà vu en 1)
4) On a par décroissance de la suite :

$$2\, a_{n+2} \leq a_{n+2} + a_n \leq 2\, a_n$$

Soit :

$$a_{n+2} \leq \frac{1}{2\,(n+1)} \leq a_n$$

D'où pour $n \geq 1$

$$\frac{1}{2\,(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{2\,(n-1)}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq 2\,n\,a_n \ \leq \frac{n}{n-1}$$

Par le théorème des gendarmes on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} 2\,n\,a_n = 1$$

D'où :

$$a_n \sim \frac{1}{2\,n}$$

5) Si $r \geq 0$ alors :

$$a_n\,r^n \sim \frac{r^n}{2\,n}$$

Or on a :

$$0 \leq \frac{r^n}{2\,n} \leq r^n$$

Donc par comparaison, pour $r < 1$ la série de terme général $\frac{r^n}{2\,n}$ converge.

Pour $r = 1$ on a :

$$a_n \sim \frac{1}{2\,n}$$

Et la série de terme général $\frac{1}{2\,n}$ diverge donc la série de terme général a_n diverge. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\,x^n$ est 1. Or pour $x = -1$ la série est alternée avec la valeur absolue de son terme général qui tend vers 0 en décroissant donc la série converge. Ainsi :

$$D = [-1,1[$$

On en déduit pour $x \in D$:

$$u_n(x) = \int_0^{\pi/4} \big(x\,tan(t)\big)^n\,dt$$

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{0}^{\pi/4} \left(x\, tan(t)\right)^n \, dt$$

Posons pour $x \in]-1,1[$

$$f_n(t) = \left(x\, tan(t)\right)^n$$

Alors :

$$|f_n(t)| \leq |x|^n$$

La série de fonctions de terme général $f_n(t)$ est donc normalement convergente en la variable t sur $]-1,1[$. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{\pi/4} f_n(t)\, dt \right) = \int_{0}^{\pi/4} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

D'où :

$$U(x) = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x\, tan(t)\right)^n \right) dt$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{1 - x\, tan(t)}\, dt$$

Faisons un changement de variable en posant :

$$u = tan(t)$$

$$du = \left(1 + tan^2(t)\right) dt$$

Soit :

$$dt = \frac{du}{1 + u^2}$$

Ainsi :

$$U(x) = \int_{0}^{1} \frac{1}{1 - x\, u} \frac{du}{1 + u^2} = \int_{0}^{1} \frac{du}{(1 - x\, u)\,(1 + u^2)}$$

Procédons à une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x\,u)\,(1+u^2)} = \frac{a}{1-x\,u} + \frac{b\,u+c}{1+u^2}$$

On trouve :

En multipliant par $1 - x\,u$ et en faisant $u = 1/x$:

$$a = \frac{x^2}{1+x^2}$$

En multipliant par u et faisant tendre u vers l'infini :

$$b - \frac{a}{x} = 0$$

En faisant $u = 0$:

$$1 = a + c$$

D'où :

$$\frac{1}{(1-x\,u)\,(1+u^2)} = \frac{x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{1-x\,u} + \frac{x}{1+x^2} \times \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{1+u^2}$$

Donc :

$$U(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\left[-\frac{1}{x}\,Ln(1-x\,u)\right]_0^1 + \frac{x}{1+x^2}\left[\frac{1}{2}\,Ln(1+u^2)\right]_0^1 + \frac{1}{1+x^2}\,[tan^{-1}(u)]_0^1$$

$$\boxed{U(x) = \frac{-x\,Ln(1-x) + \frac{1}{2}\,x\,Ln(2) + \frac{\pi}{4}}{1+x^2}}$$

Reste à évaluer $U(-1)$. Nous allons procéder par continuité en notant que sur $[-1{,}0]$ la série de terme général $a_n\,x^n$ est alternée avec la valeur absolue de son terme général qui tend vers 0 en décroissant. Un résultat sur les séries alternées nous donne alors une majoration du reste de rang n :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\,x^n\right| \le |a_{n+1}\,x^{n+1}| \le a_{n+1}$$

La convergence de la série entière est donc uniforme sur $[-1{,}0]$. On en déduit que la série est continue sur $[-1{,}0]$. Ainsi la formule précédente de $U(x)$ est valable pour $x = -1$