MAIRIE DE PARIS

CONCOURS PUBLIC
POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DES SERVICES TECHNIQUES
DE LA VILLE DE PARIS
OUVERT POUR 2 POSTES

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

18 Mars 2015

Le sujet comporte 4 pages avec 5 exercices indépendants

Durée : 4h : coefficient 3

RAPPEL :
Aucun nom, prénom, signature ou signe distinctif, supérieur hiérarchique, initiales quelles qu'elles soient, numéro de téléphone ou adresse du service, etc... ne doit figurer dans le corps (ou le timbre) de votre composition sous peine d'exclusion du concours.

N.B :
Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$.
A tout endomorphisme u de E, et à tout vecteur V de E, on associe le système de vecteurs de E :

$$S(u, V) = (V, u(V), u^2(V))$$

(On rappelle que $u^2 = u \circ u$).
On dit que l'endomorphisme u de E est cyclique si et seulement si il existe un vecteur V de E tel que le système $S(u, V)$ soit une base de E.
1) Montrez que si l'endomorphisme u est cyclique, on a $rg(u) \geqslant 2$.
Montrez à l'aide d'un exemple que la réciproque est fausse.
2) On considère l'endomorphisme u de E dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et le vecteur V défini par :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que le système $S(u, V)$ est une base de E, et en déduire que l'endomorphisme u est cyclique.

3) Soit u un endomorphisme cyclique, et V un vecteur de E tel que $S(u, V)$ soit une base de E. Donner la forme de la matrice de u par rapport à la base $S(u, V)$, et montrer que cette matrice est indépendante du choix du vecteur V.
4) Montrer que si l'endomorphisme u est cyclique, tous les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 2
On considère l'intégrale généralisée suivante, où x désigne un nombre réel :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}}$$

1) Montrer que cette intégrale est définie si et seulement si le réel x appartient à l'intervalle $I =]-1, +\infty[$.
Dans la suite, on considèrera la fonction réelle de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}}$$

2) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.
3) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de I.
4) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
5) Déterminer, suivant les valeurs du réel x, une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
On pourra utiliser le changement de variable :

$$u = \sqrt{\frac{1+xt}{1-t}}$$

Exercice 3
On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls, telle que la série entière de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

ait un rayon de convergence réel R strictement positif, et telle que la série de terme général $u_n(R)$ soit divergente.
On considère la fonction somme S de cette série entière, soit :

$$\forall x \in]-R, R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1) Montrer que :

$$S(x) \underset{x \to R_-}{\longrightarrow} +\infty$$

2) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = \arcsin x$$

Rappeler l'expression de la dérivée de f sur l'intervalle $]-1,1[$, et déterminer le développement en série entière de f' sur l'intervalle $]-1,1[$.
3) En déduire le développement en série entière de f sur l'intervalle $]-1,1[$, soit :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

4) Montrer, en utilisant la question 1), que l'on a :

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Exercice 4

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'application φ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2) Déterminer 4 polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 unitaires, de degrés respectifs $0,1,2,3$, et deux à deux orthogonaux pour φ.
(On rappelle qu'un polynôme est unitaire si et seulement si il est non nul, et de coefficient dominant égal à 1).
3) On appelle a,b,c les trois racines de P_3, rangées dans l'ordre croissant : $a < b < c$.
Déterminer a,b,c.
4) Montrer qu'il existe un triplet unique (A,B,C) de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = AP(a) + BP(b) + CP(c)$$

et déterminer les réels A,B,C.
5) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X], \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = AP(a) + BP(b) + CP(c)$$

(On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n).

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

1) Montrer que $f(x, y)$ tend vers $+\infty$ quand la norme du vecteur (x, y) tend vers $+\infty$ (indépendamment du choix de la norme).

2) En déduire que la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, déterminer la valeur m de ce minimum, et déterminer les points où la valeur m est atteinte.

3) On considère le domaine D ainsi défini :

$$D = [-1, 1]^2$$

On définit la restriction g de f à D :

$$\forall (x, y) \in D, g(x, y) = f(x, y)$$

Déterminer le maximum et le minimum de la fonction g sur D, et préciser les points pour lesquels ils sont atteints.

FIN DE L'ENONCE