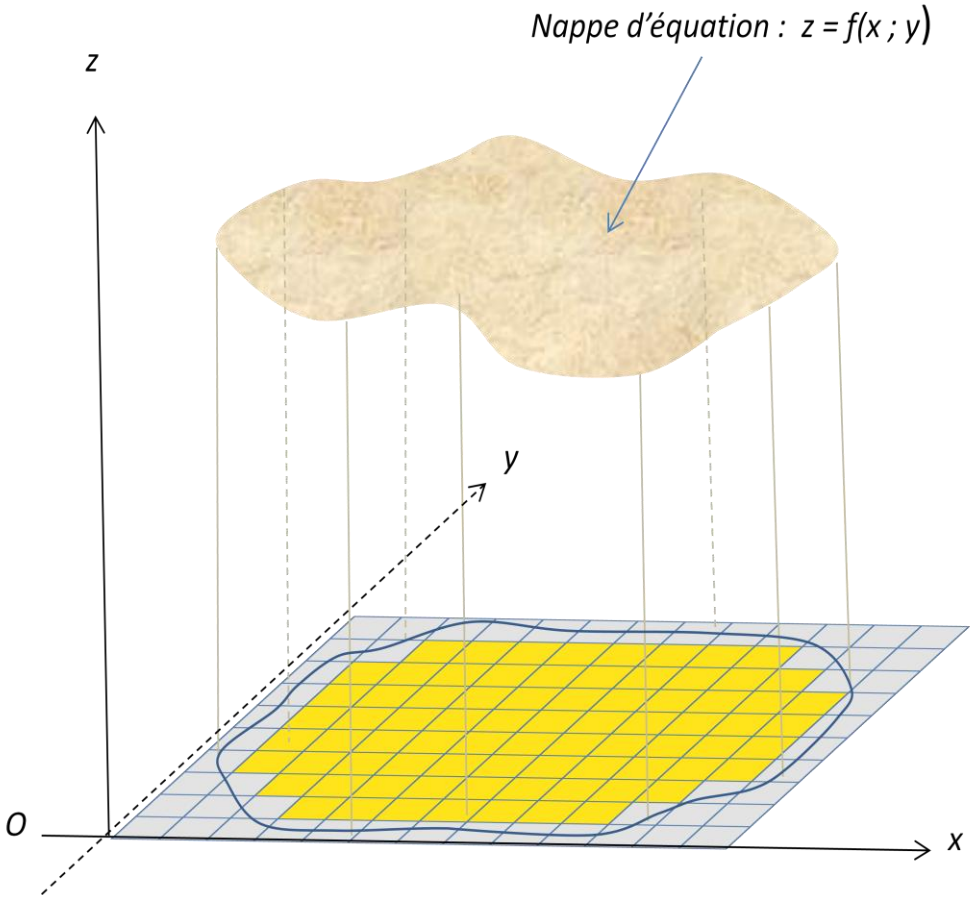
Les intégrales doubles et triples

Nous allons présenter dans ce fichier le concept d'intégrales doubles et triples

Domaine d'intégration plan : l'intégrale double

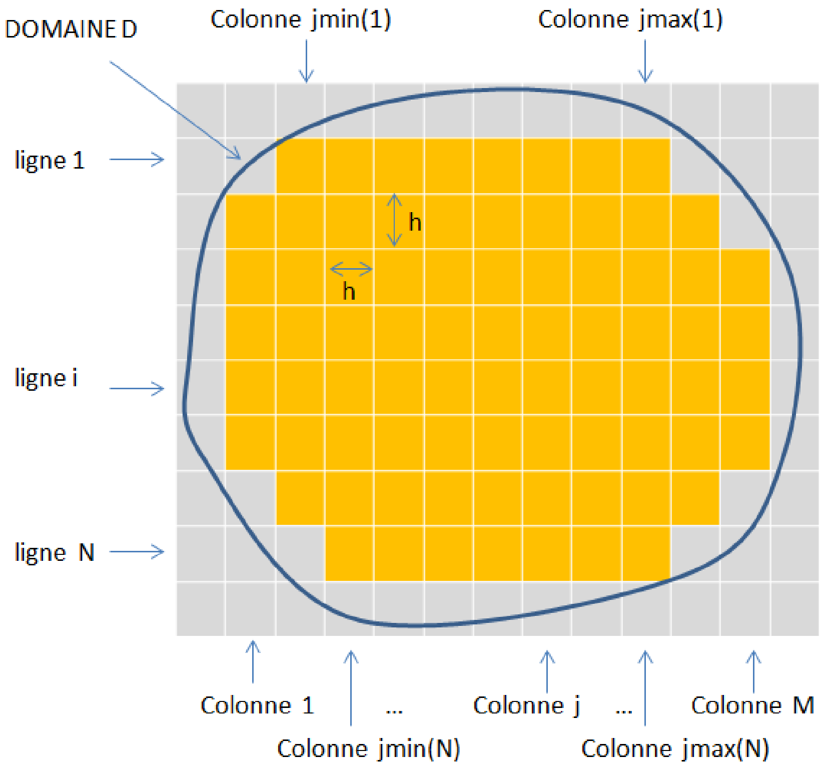
Etant donné une fonction de deux variables $f(x\,;y)$ à valeurs réelles et continue sur un domaine compact D (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$. Cette fonction définit dans un repère orthonormé direct de l'espace (O ; x ; y ; z), une surface appelée nappe, d'équation : $z = f(x\,;y)$.



Couvrons alors le domaine D d'un pavage régulier de carrés, dont le côté h aura une taille pouvant être prise aussi petite que l'on veut (on dit infinitésimale) et considérons les carrés intégralement contenus dans le domaine (en orange sur la figure).

Ceux-ci définissent N lignes repérées par un indice i allant de 1 à N et M colonnes repérées par un indice j allant de 1 à M.

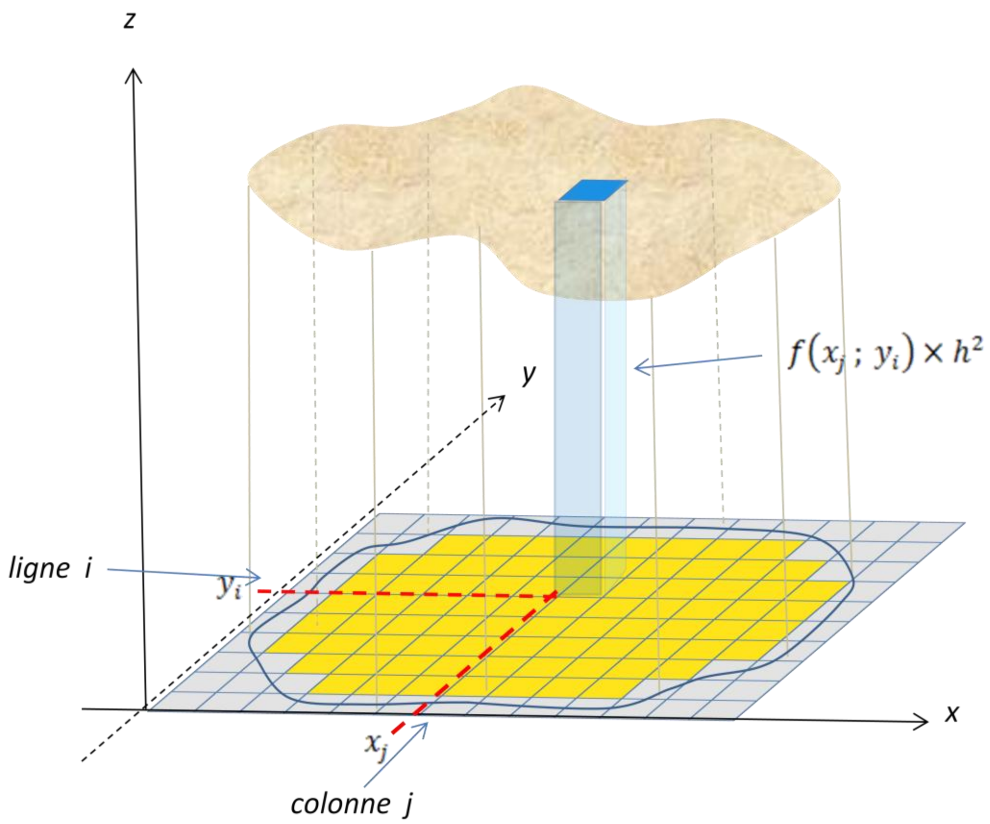
Pour chaque ligne i de pavés, l'indice de colonne du premier pavé orange est noté *jmin(i)* et l'indice du dernier, *jmax(i)*.



Considérons alors, dans le domaine D, le point inférieur gauche de coordonnées $(x_j\ ;\ y_i)$ du carré de la ligne *i* et de la colonne *j* et définissons la quantité :

$$V(h) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=jmin(i)}^{jmax(i)} f(x_j\ ;\ y_i) \times h^2$$

Lorsque *h* tend vers *0*, cette quantité tend vers une valeur qui est le volume situé entre la nappe et le domaine *D* lorsque *f* est positive, et l'opposé de ce volume lorsque *f* est négative.



La limite de *V(h)* lorsque *h* tend vers *0* est appelée intégrale double de *f* sur le domaine *D* et notée :

$$\iint_D f(x;y)\ dx\ dy$$

La quantité : $f\left(x_j\ ;\ y_i\right) \times h^2$ apparaissant dans l'évaluation de l'intégrale pour une valeur de *h* donnée, est appelée contribution élémentaire. C'est elle qui est représentée de façon symbolique par un élément dit différentiel d'intégrale qui est : $f(x;y)dx\ dy$

Pour bien comprendre les propriétés d'une intégrale double, il est important de se la représenter sous forme discrétisée, en terme de volume « algébrique » associé à une nappe de l'espace.

Additivité de l'intégrale double :

Si *D* et *D'* sont deux domaines compacts dont l'intersection a une aire nulle alors :

$$\boxed{\iint_{D\cup D'} f(x;y)\ dx\ dy = \iint_D f(x;y)\ dx\ dy + \iint_{D'} f(x;y)\ dx\ dy}$$

Linéarité de l'intégrale double :

$$\iint_D \big(f(x;y) + g(x;y)\big)\, dx\ dy\ = \iint_D f(x;y)\ dx\ dy + \iint_D g(x;y)\ dx\ dy$$

$$\iint_D c\, f(x;y)\ dx\ dy = c\ \iint_D f(x;y)\, dx\ dy$$

Ces propriétés découlent de propriétés analogues sur les formes discrétisées et d'un passage à la limite.

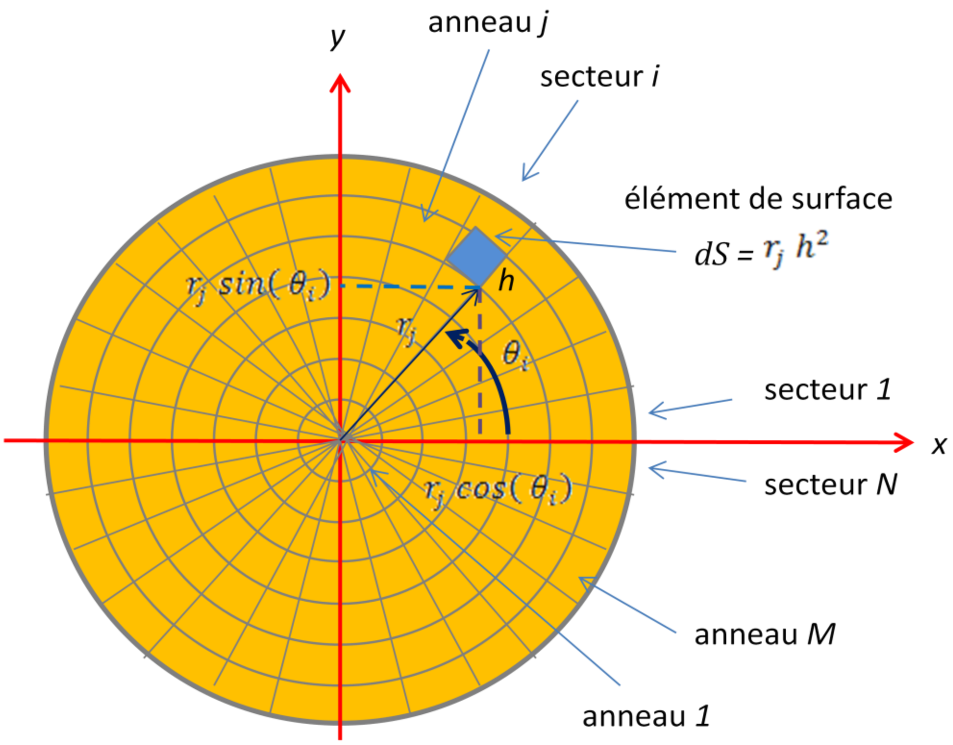
Changement de variable polaire :

Lorsque le domaine D est un domaine en forme de disque, de secteur ou d'anneau, il est intéressant de calculer l'intégrale double en utilisant une autre forme de discrétisation, qui fait apparaître des rectangles élémentaires de taille variable.

Nous allons l'étudier pour un domaine en forme de disque, mais la démarche serait analogue pour un domaine en forme de secteur ou bien d'anneau.

Définissons d'abord une discrétisation de l'intégrale en couvrant le domaine par des anneaux de largeur *dr = h*, ces anneaux étant eux-mêmes divisés en petits secteurs d'ouverture $d\theta = h$, comme le petit secteur figuré en bleu sur la figure qui suit.

Chaque secteur, intégralement contenu dans le disque, est repéré par le numéro *j* de l'anneau qui le définit, *j* variant de *1* à *M*, et par le numéro *i* du secteur dans cet anneau, *i* variant de *1* à *N*.



La discrétisation de l’intégrale double est alors :

$$V(h) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} f\left(r_j\, cos(\,\theta_i); r_j\, sin(\,\theta_i)\right) \times r_j\, h^2$$

Il est à noter alors que c’est la discrétisation d’une intégrale double, sur le domaine rectangulaire d’un plan d’axes *r* et θ défini par (R étant le rayon du disque) :

$$D' = [0\,;R] \times [0\,;2\pi]$$

Ainsi, l’intégrale devient :

$$\iint_D f(x;y)\;\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos(\theta); r\sin(\theta))\;\,r\,dr\,d\theta$$

Si le domaine D est un secteur de rayon intérieur R_{min}, de rayon extérieur R_{max} et compris entre les angles orientés θ_{min} et θ_{max} alors le domaine d’intégration en *r* et θ est :

$$D' = [R_{min}\,;R_{max}] \times [\theta_{min}\,;\theta_{max}]$$

Si le domaine D est un anneau de rayon intérieur R_{min} et de rayon extérieur R_{max}, alors le domaine d’intégration en *r* et θ est :

$$D' = [R_{min}\,;R_{max}] \times [0\,;\;2\pi]$$

Séparation des intégrales

Reprenons la discrétisation en (x ; y) de l'intégrale d'une fonction f(x ; y) continue sur un domaine D compact du plan :

$$V(h) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=jmin(i)}^{jmax(i)} f(x_j\,;\,y_i) \times h^2$$

Notons alors qu'elle s'écrit encore :

$$V(h) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=jmin(i)}^{jmax(i)} f(x_j\,;\,y_i)\ \times h \right) \times h$$

Et notons :

$$V_i(h) = \sum_{j=jmin(i)}^{jmax(i)} f(x_j\,;\,y_i)\ \times h$$

$V_i(h)$ est alors une discrétisation d'une intégrale simple :

$$I(\,y_i) = \int_{xmin(i)}^{xmax(i)} f(x\,;\,y_i)\ dx$$

Nous pouvons alors prendre, pour nouvelle discrétisation de l'intégrale double :

$$W(h) = \sum_{i=1}^{N} I(\, y_i) \times h$$

Si nous posons :

$$I(y) = \int_{xmin(y)}^{xmax(y)} f(x\,;y)\; dx$$

$W(h)$ est alors une discrétisation de :

$$\int_{ymin}^{ymax} I(y)\; dy$$

Nous en déduisons le très important théorème permettant le calcul pratique des intégrales doubles :

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\;\; dx\; dy = \int_{ymin}^{ymax} \left(\int_{xmin(y)}^{xmax(y)} f(x\,;y)\; dx \right)\; dy}$$

Notez que les rôles entre x et y peuvent être intervertis, conduisant à une expression de la forme :

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\;\; dx\; dy = \int_{xmin}^{xmax} \left(\int_{ymin(x)}^{ymax(x)} f(x\,;y)\; dx \right)\; dy}$$

Il sera alors plus judicieux d'utiliser l'une ou l'autre des deux relations, selon la forme du domaine.

Séparation des intégrales sur un disque, un secteur ou un anneau

Reprenons la propriété de changement de variable établie par exemple pour un disque :

$$\iint_D f(x;y)\ dx\, dy = \iint_{D'} f(r\cos(\theta); r\sin(\theta))\ r\, dr\, d\theta$$

Avec :

$$D' = [0\,;R] \times [0\,;2\pi]$$

La propriété précédente conduit alors à :

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\ dx\, dy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f\big(r\cos(\theta); r\sin(\theta)\big) d\theta\right) r\, dr}$$

ou

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\ dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f\big(r\cos(\theta); r\sin(\theta)\big)\, r\, dr\right) d\theta}$$

Dans le cas où f ne dépend pas de θ , il vaut mieux utiliser la première forme et si f ne dépend pas de r, la seconde forme.

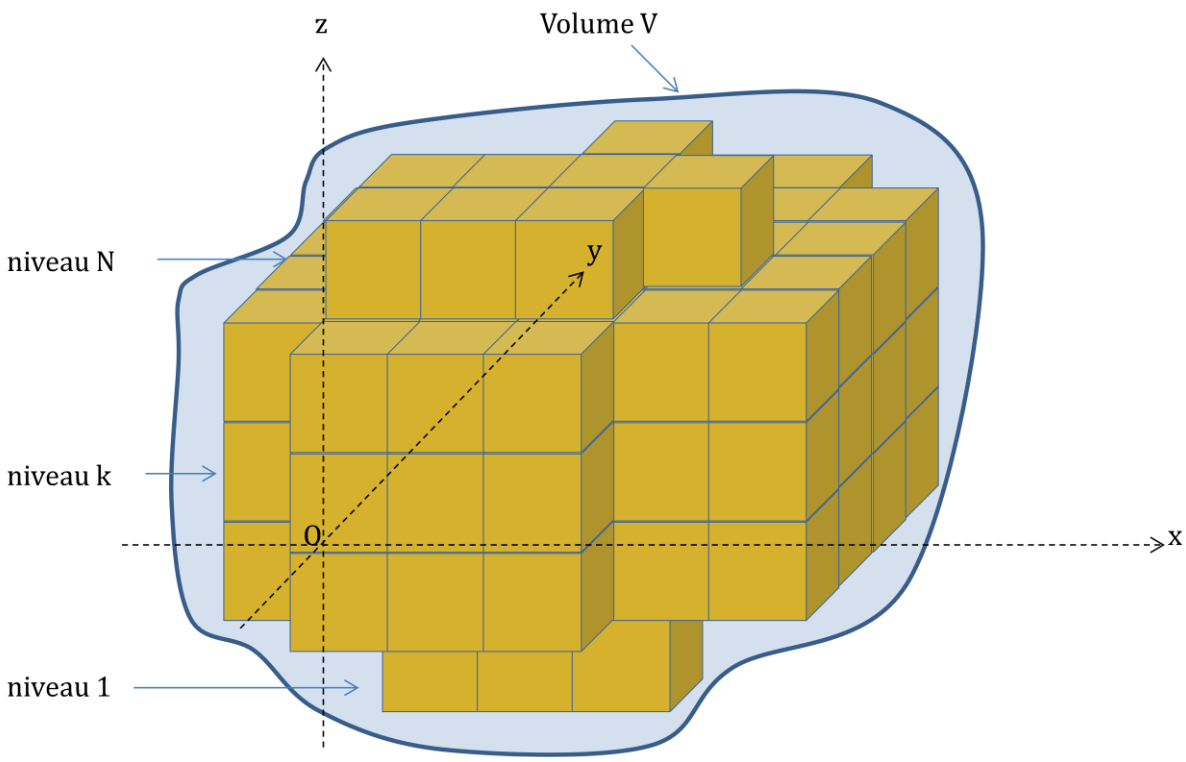
Dans les autres cas, il faudra regarder si l'expression de f est plus simple à intégrer en r ou en θ. Dans le premier cas, il vaudra mieux employer la seconde expression qui fait intégrer d'abord en r.

Domaine d'intégration volumique : l'intégrale triple

Etant donné une fonction de trois variables $f(x\,;y\,;z)$ à valeurs réelles et continue sur un domaine compact V (fermé borné) de $\mathbb{R}^3$, nous définissons d'abord, comme précédemment, une notion discrétisée de l'intégrale triple, mais dans ce cas, nous ne disposons plus de la possibilité de l'interpréter en termes géométriques. Il nous faudrait pour cela percevoir dans un espace à quatre dimensions.

Aussi allons nous nous contenter de définir le concept par analogie.

Il nous reste en effet possible de nous représenter le domaine d'intégration, qui est un volume de l'espace, ainsi que le fait de le recouvrir par des cellules élémentaires, qui seront des cubes de côté h.



Notre pavage est constitué de *N* niveaux.. Dans un niveau de cubes, repéré par l'indice *k*, nous avons des lignes de cubes repérées par un indice *i* variant de *imin(k)* à *imax(k),* et dans une ligne d'indice *i* nous avons des colonnes de cubes repérées par l'indice *j* variant de *jmin(i ; k)* à *jmax(j ; k).*

Nous définirons alors un « hyper volume » *W(h*) sous la forme :

$$W(h) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=imin(k)}^{imax(k)} \sum_{j=jmin(i;k)}^{jmax(i,k)} f\left(x_j \,;\, y_i \,;\, z_k\right) \times h^3$$

$\left(x_j \,;\, y_i \,;\, z_k\right)$ désignent alors les coordonnées du coin inférieur gauche et situé sur l'avant de la figure de la cellule cubique située au niveau k, dans la j*ème* colonne de la i*ème* rangée.

L'intégrale triple sur le volume V est alors la valeur limite de $W(h)$ quand h tend vers 0. On la note :

$$\iiint_V f(x; y\,; z)dx\ dy\ dz$$

Nous avons alors des propriétés analogues de linéarité et d'addition pour des volumes constitués de la réunion de volumes dont les intersections ont des volumes nuls.