Les propriétés de l'hyperbole

Une hyperbole est, rappelons le, une courbe plane définie par une équation dans un repère orthonormé de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, b étant deux réels strictement positifs

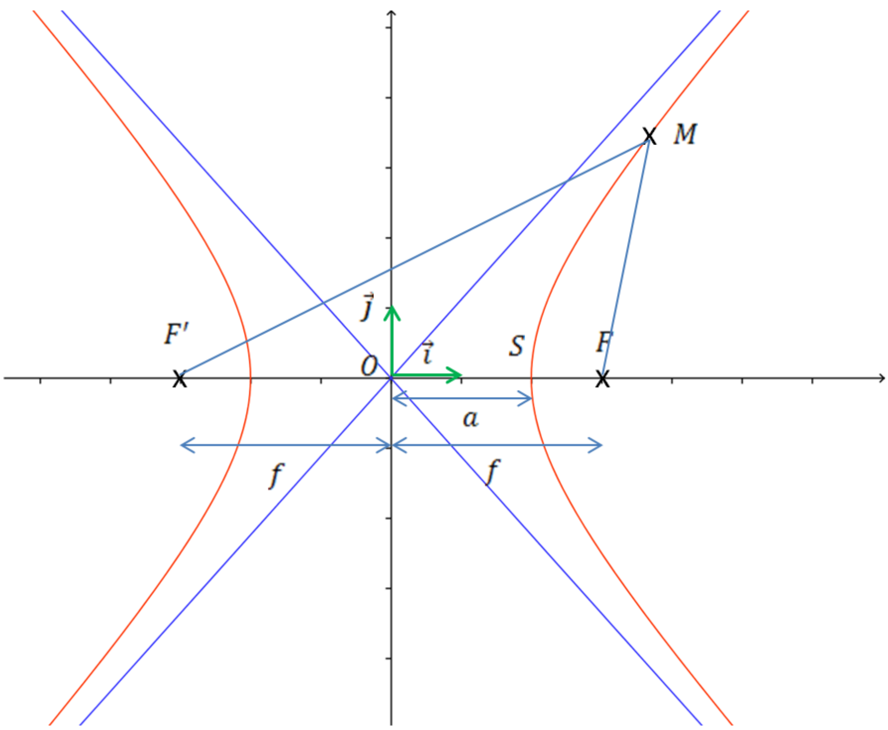
1) Propriétés focales

De façon analogue à ce qui a été fait pour l'ellipse, nous sommes amenés à nous intéresser pour un nombre Lstrictement positif donné et deux points distincts F et F' appelés foyers donnés, aux ensembles de points M du plan vérifiant une relation de la forme :

$$|MF - MF'| = L$$

Notons les coordonnées des différents points dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est le milieu de F et de F' et $\vec{\imath}$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{F'F}$ et de même sens.

$$M(x, y) \quad F(0, f) \quad F'(0, -f)$$



Notons par inégalité triangulaire que l'on a dans le cas où M, F, F' ne sont pas alignés :

$$MF < MF' + FF'$$

$$MF' < MF + FF'$$

Soit :

$$|MF - MF'| < FF'$$

Une condition nécessaire pour que ce type d'ensemble ne soit pas vide ou réduit à deux points alignés avec F et F' est donc :

$$L < FF' = 2\,f$$

On a alors, en posant $L = 2\,a$:

$$|MF - MF'| = L$$

$$\Leftrightarrow\ MF^2 + MF'^2 - 2\,MF\,MF' = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow\ (x-f)^2 + y^2 + (x+f)^2 + y^2 - 2\sqrt{((x-f)^2 + y^2)\,((x+f)^2 + y^2)} = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 2\,f\,x + f^2 + y^2 + x^2 + 2\,f\,x + f^2 + y^2 \\ - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2 + 2\,f\,x)(x^2 + y^2 + f^2 - 2\,f\,x)} = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow\ 2\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,f^2 - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,f^2\,x^2} = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,f^2\,x^2} = (x^2 + y^2 + f^2) - 2\,a^2$$

A ce stade, le raisonnement ne peut avancer que par une simple implication, la réciproque se faisant dans un second temps. En élevant au carré la relation ci-dessus, on déduit la relation suivante :

$$(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,f^2\,x^2 = \left((x^2 + y^2 + f^2) - 2\,a^2\right)^2$$

Puis on poursuit par équivalence le raisonnement

$$(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,f^2\,x^2 = (x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,a^2(x^2 + y^2 + f^2) + 4\,a^4$$

$$\Leftrightarrow\ 4\,(f^2 - a^2)\,x^2 - 4\,a^2\,y^2 = 4\,a^2\,(f^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1$$

Or on a :

$$f > a$$

On peut donc poser :

$$b = \sqrt{f^2 - a^2}$$

L'équation précédente équivaut alors à :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

qui est l'équation d'une hyperbole, ce qui prouve que notre ensemble initial est inclus dans une hyperbole. Voyons la réciproque. Soit $M(x, y)$ un point de l'hyperbole ci-dessus, alors les équivalences établies permettent de remonter jusqu'à :

$$(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\, f^2\, x^2 = \left((x^2 + \ y^2 + \ f^2) - 2\, a^2\right)^2$$

Afin de pouvoir remonter plus haut il faut prendre la racine des deux membres mais pour cela examiner le signe de l'expression sous le carré. Or :

$$(x^2 + \ y^2 + \ f^2) - 2\, a^2 = (x^2 - a^2) + y^2 + b^2$$

et pour un point de l'ellipse, on a : $|x| \geq a$ donc

$$(x^2 - a^2) + y^2 + b^2 \geq 0$$

Ainsi on déduit :

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\, f^2\, x^2} = \ (x^2 + \ y^2 + \ f^2) - 2\, a^2$$

et on peut remonter par équivalence jusqu'à $|MF - MF'| = L$

<u>Conclusion de l'analyse</u> :

Etant donnés deux points $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F'}$ d'un plan appelés foyers et $\boldsymbol{L}$ un réel strictement plus petit que la distance $\boldsymbol{FF'}$ alors l'ensemble des points $\boldsymbol{M}$ de ce plan tels que $|\boldsymbol{MF} - \boldsymbol{MF'}| = \boldsymbol{L}$ est une hyperbole

Réciproquement, soit une hyperbole d'équation en repère orthonormé :

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Alors il existe deux points $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F'}$ appelés foyers tels que l'hyperbole soit l'ensemble des points du plan tels que $|\boldsymbol{MF} - \boldsymbol{MF'}| = \boldsymbol{2\, a}$. Les coordonnées des foyers sont :

$$\boldsymbol{F(0, f) \quad F'(0, -f)}$$

avec :

$$\boldsymbol{f = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

2) Directrice et excentricité

Soit une hyperbole d'équation en repère orthonormé :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Considérons une droite $\mathcal{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées $(O, \vec{\jmath})$ du repère et d'équation $x = d$. Considérons alors pour un point $M(x, y)$ de l'hyperbole, le carré du quotient de la distance MF à la distance de M à la droite $\mathcal{D}$.

$$\left(\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})}\right)^2 = \frac{(x - f)^2 + y^2}{(x - d)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\, f\, x + f^2 + y^2}{x^2 - 2\, d\, x + d^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\, f\, x + f^2 + b^2\, \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}{x^2 - 2\, d\, x + d^2}$$

$$= \frac{\frac{a^2 + b^2}{a^2}\, x^2 - 2\, f\, x + f^2 - b^2}{x^2 - 2\, d\, x + d^2}$$

$$= \frac{\frac{f^2}{a^2}\, x^2 - 2\, f\, x + a^2}{x^2 - 2\, d\, x + d^2}$$

Si on souhaite que cette quantité ne dépende pas de x, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{f^2}{a^2} = \frac{-2\, f}{-2\, d} = \frac{a^2}{d^2}$$

Ce problème possède une solution unique :

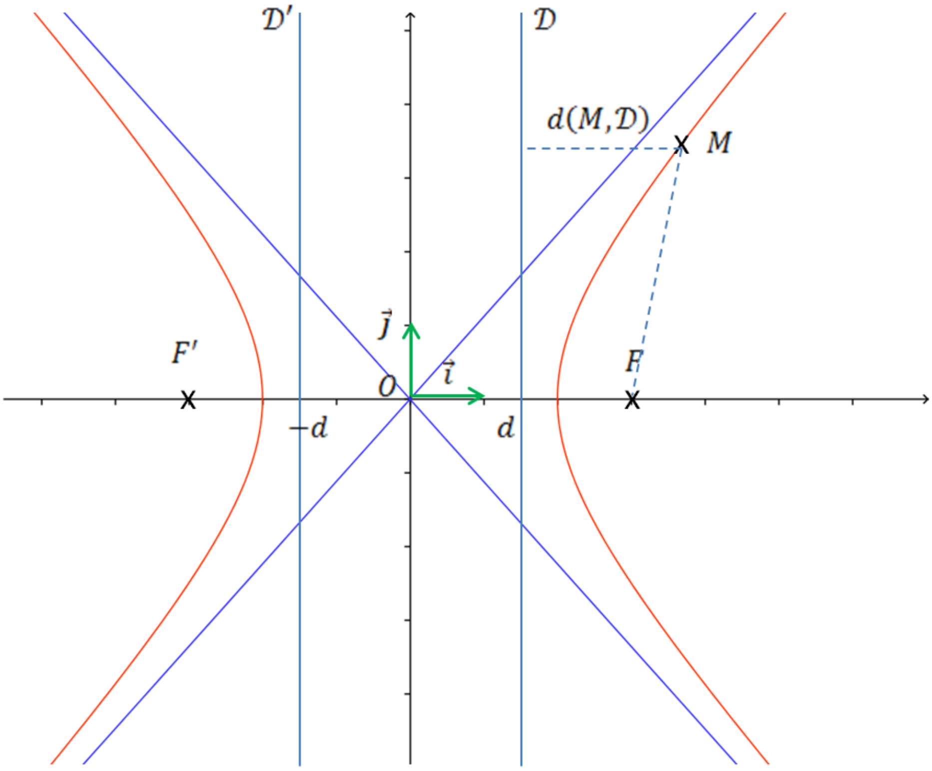
$$d = \frac{a^2}{f}$$

On a alors pour cette valeur :

$$\left(\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})}\right)^2 = \frac{f^2}{a^2}$$

Un travail analogue peut se faire avec le foyer F' dans ce cas :

$$d' = \frac{a^2}{-f}$$



<u>Conclusion de l'analyse</u> :

L'hyperbole possède deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ appelées directrices et d'équations respectives $x = d$ et $x = d'$ avec :

$$d = \frac{a^2}{f} \quad , \qquad d' = \frac{a^2}{f'} = \frac{a^2}{-f}$$

et est l'ensemble des points du plan tels que :

$$\frac{MF}{d(M,\mathcal{D})} = \frac{f}{a}$$

et aussi l'ensemble des points du plan tels que :

$$\frac{MF'}{d(M,\mathcal{D}')} = \frac{f}{a}$$

On appelle excentricité de l'hyperbole la quantité :

$$e = \frac{f}{a} > 1$$

3) Tangente et bissectrice

Soit $M(x, y)$ un point de l'hyperbole précédente

Par analogie avec l'ellipse, la partie de l'hyperbole située dans le demi plan $x > 0$ peut être décrite à l'aide d'un paramétrage cartésien

$$\begin{cases} x = a\, cht) \\ y = b\, sh(t) \end{cases}$$

Celle dans le demi plan $x < 0$ par :

$$\begin{cases} x = -a\, cht) \\ y = b\, sh(t) \end{cases}$$

Pour la partie située dans le demi plan $x > 0$,un vecteur directeur de la tangente au point M est donc :

$$\vec{T} \begin{pmatrix} a\, sh(t) \\ b\, ch(t) \end{pmatrix}$$

et un vecteur normal

$$\vec{N} \begin{pmatrix} -b\, ch(t) \\ a\, sh(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{MF} \begin{pmatrix} f - a\, ch(t) \\ -b\, sh(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MF'} \begin{pmatrix} -f - a\, ch(t) \\ -b\, sh(t) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$MF^2 = f^2 - 2\, a\, f\, ch(t) + a^{\,2}\, ch^2(t) + b^{\,2}\, sh^2(t)$$

$$= a^2 + b^2 - 2\, a\, f\, ch(t) + a^{\,2}\, ch^2(t) + b^{\,2}\, (ch^2(t) - 1)$$

$$= a^2 - 2\, a\, f\, ch(t) + (a^{\,2} + b^{\,2})\, ch^2(t)$$

$$= a^2 - 2\, a\, f\, ch(t) + f^2\, ch^2(t)$$

$$= \left(a - f\, ch(t)\right)^{\,2}$$

Or :

$$f\, ch(t) \geq a$$

Donc :

$$MF = f\ ch(t) - a$$

De façon analogue :

$$MF' = f\ ch(t) + a$$

Ainsi :

$$\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} \cdot \left(-\vec{T}\right) = \frac{-a\ f\ sh(t) + a^2\ ch(t)\ sh(t) + b^2\ ch(t)\ sh(t)}{f\ ch(t) - a}$$

$$= -\frac{-a\ f\ sh(t) + f^2\ ch(t)\ sh(t)}{f\ ch(t) - a} = f\ sh(t)$$

De même :

$$\frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'} \cdot \left(-\vec{T}\right) = \frac{a\ f\ sh(t) + a^2\ ch(t)\ sh(t) + b^2\ ch(t)\ sh(t)}{f\ ch(t) + a}$$

$$= -\frac{a\ f\ sh(t) + f^2\ ch(t)\ sh(t)}{f\ ch(t) + a} = f\ sh(t)$$

Donc :

$$cos\left(-\vec{T}, \overrightarrow{MF'}\right) = cos\left(\overrightarrow{MF}, -\vec{T}\right)$$

De plus :

$$det\left(-\vec{T}, \overrightarrow{MF'}\right) = \begin{vmatrix} -a\ sh(t) & -f - a\ ch(t) \\ -b\ ch(t) & -b\ sh(t) \end{vmatrix}$$

$$= a\ b\ \ sh^2(t) - b\ f\ \ ch(t) - a\ b\ ch^2(t)$$

$$= -a\ b\ - b\ f\ \ ch(t)$$

$$= -b\ (f\ ch(t) + a)$$

$$det\left(\overrightarrow{MF}, -\vec{T}\right) = \begin{vmatrix} f - a\ ch(t) & -a\ sh(t) \\ -b\ sh(t) & -b\ ch(t) \end{vmatrix}$$

$$= -b\ f\ ch(t) + \ a\ b\ ch^2(t) - a\ b\ sh^2(t)$$

$$= -b\ f\ \ ch(t) + a\ b$$

$$= -b\ (f\ ch(t) - a)$$

Or pour tout réel t

$$\begin{cases} f\ ch(t) + a > 0 \\ f\ ch(t) - a > 0 \end{cases}$$

Donc $det(-\vec{T}, \overrightarrow{MF'})$ et $det(\overrightarrow{MF}, -\vec{T})$ sont de même signe. On en déduit que les angles orientés $(-\vec{T}, \overrightarrow{MF'})$ et $(\overrightarrow{MF}, -\vec{T})$ sont égaux et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{(M, -\vec{T})} \textbf{ est la bissectrice de l'angle } \boldsymbol{(F', \widehat{M}, F)}}$$

Par symétrie, la même propriété s'applique à la partie d'hyperbole située dans le demi-plan $x < 0$