Ensembles, intersection, réunion

Nous allons établir différentes propriétés relatives à l'intersection, la réunion, le complémentaire sur des sous ensembles d'un ensemble donné en montrant différentes méthodes, l'une qui s'apparente à un travail de maternelle et l'autre qui utilise judicieusement des 0 et 1 dans une logique dite Booléenne, préparant l'analyse automatisée de ce genre de problème par des ordinateurs. Mais auparavant, définissons les notions d'union, d'intersection et de complémentaire.

I Union, intersection et complémentaire, cardinal

Choisissons une ensemble simple comme celui formés par les six chiffres d'un dé appelés **éléments**. Nous le notons :

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Un sous ensemble de E formé d'un seul élément est alors appelé **singleton**. En voici un exemple :

$$A = \{1\}$$

Deux sous ensembles de E n'ayant pas d'éléments communs sont dits **disjoints** comme les sous ensembles B et C suivants :

$$B = \{1; 2\} \qquad C = \{4; 6\}$$

Un sous ensemble n'ayant pas d'éléments est appelé **ensemble vide** et noté $\{\ \}$ ou $\emptyset$.

L'intersection de deux sous ensembles est le sous ensemble de leurs éléments communs. Par exemple pour :

$$B = \{1; 2; 3; 5\} \qquad C = \{2; 5; 6\}$$

l'intersection est :

$$B \cap C = \{2; 5\}$$

La réunion de deux sous ensembles est le sous ensemble de leurs éléments mis ensembles. Par exemple pour :

$$B = \{1; 2; 3; 5\} \qquad C = \{2; 5; 6\}$$

la réunion est :

$$B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 6\}$$

Le complémentaire d'un sous ensemble dans un autre est le sous ensemble des éléments qui ne sont pas dans le premier mais dans l'autre. Par exemple pour :

$$B = \{1; 2; 3; 5\} \qquad C = \{2; 5; 6\}$$

le complémentaire de B dans C s'obtient en enlevant dans C les éléments de B soit :

$$C \backslash B = \{6\}$$

De même, le complémentaire de C dans B est :

$$B \backslash C = \{1; 3\}$$

Le complémentaire de B dans l'ensemble E de départ est tout simplement noté :

$$\overline{B} = \{4; 6\}$$

Dans le cas où le sous ensemble a un nombre fini d'éléments, ce nombre est appelé son cardinal. Ainsi pour le sous ensemble B précédent :

$$\mathrm{card}(B) = 4$$

Un cas particulier est :

$$\mathrm{card}(\emptyset) = 0$$

<u>II Sous ensembles et évènements</u>

Un des grands intérêts de faire une théorie des ensembles est le développement de la théorie des probabilités. Dans ce cas, de nouvelles dénominations, plus proches du langage familier, sont employées.

Ainsi les éléments formant l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire sont qualifiées d'**issues.**

L'ensemble des issues est appelé **univers** et noté Ω (prononcez oméga). Si l'expérience consiste à lancer un dé et à s'intéresser au numéro de la face obtenue, l'univers est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

C'est l'ensemble pris en exemple précédemment.

Les sous ensembles de l'univers sont appelés **évènements** et ils sont décrits par une formulation littéraire.

Ainsi le singleton $A = \{1\}$ est **l'évènement élémentaire** : « Obtenir la face 1 »

Son complémentaire dans l'univers $\overline{A} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ est appelé **évènement contraire** de A.

Deux sous ensembles disjoints sont qualifiés **d'évènements incompatibles** comme :

$$B = \{1; 2\} = \text{"Obtenir une face inférieure ou égale à 2"}$$

$$C = \{4; 6\} = \text{"Obtenir une face égale à 4 ou 6"}$$

L'ensemble vide est appelé **évènement impossible**, il peut être énoncé dans notre exemple par :

$$\phi = \text{"Obtenir une face strictement supérieure à 6"}$$

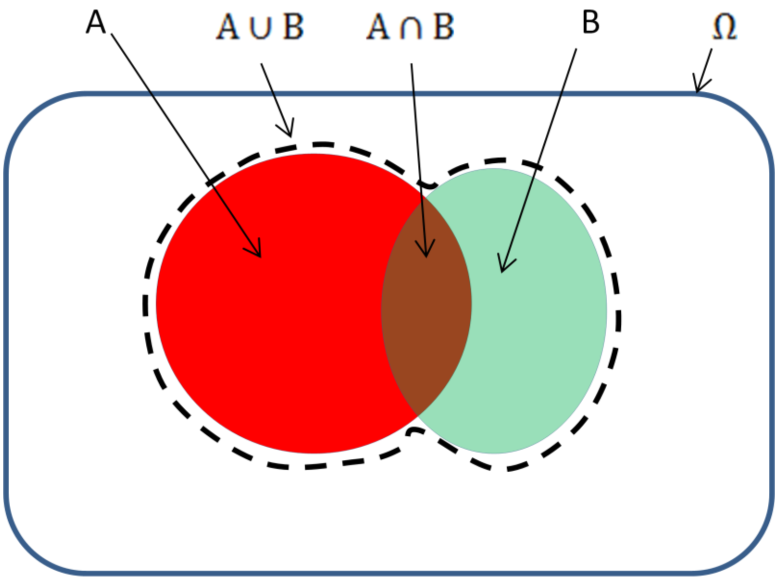
L'univers est appelé **évènement certain**, il peut être énoncé dans notre exemple par :

$$\Omega = \text{"Obtenir une face strictement positive"}$$

III Représentation « patatoïde » de sous ensembles

C'est là que le travail s'apparente à ce qui se fait en maternelle et nous allons voir que cela va suffire à établir de nombreuses propriétés, sauf que la méthode n'est pas très performante, c'est pourquoi nous glisserons vite vers l'algèbre Booléenne et quand vous y aurez goûté, vous ne pourrez plus vous en passer. Si, si, croyez moi !

On représente donc l'ensemble le plus grand E (l'univers dans le cas d'une étude de probabilité) par une patate et chaque sous ensemble de E par d'autres patates contenues dedans. Il est alors facile de visualiser l'intersection et la réunion de deux sous ensembles. On peut même utiliser des crayons de couleur, comme à la maternelle.



Dans le cas où Ω est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments, nous voyons alors une propriété des cardinaux :

$$\boxed{\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)}$$

En effet, quand nous ajoutons le nombre d'éléments de A à celui de B, nous comptons deux fois le nombre d'éléments de leur intersection.

Notez que si au cours d'une expérience aléatoire renouvelée, les issues de A apparaissent avec une proportion (appelée fréquence) notée f(A), celles de B avec la fréquence f(B), celles de $A \cap B$ avec la fréquence $f(A \cap B)$ et celles de $A \cup B$ avec la fréquence $f(A \cup B)$, nous avons la formule suivante qui s'en déduit :

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)}$$

Si l'expérience est répétée un très grand nombre de fois (plusieurs milliers pour se fixer une idée), l'observation montre que ces fréquences prennent des valeurs toujours quasi semblables appelées probabilités et nous avons alors la formule essentielle de la théorie des probabilités :

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

p(A) désignant la fréquence du nombre d'issues de A que l'on s'attend à observer sur un très grand nombre de répétitions de l'expérience. On l'appelle **probabilité** de l'évènement A.

Une autre propriété qui apparaît clairement est :

$$\boxed{\mathrm{card}(B \backslash A) = \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A)}$$

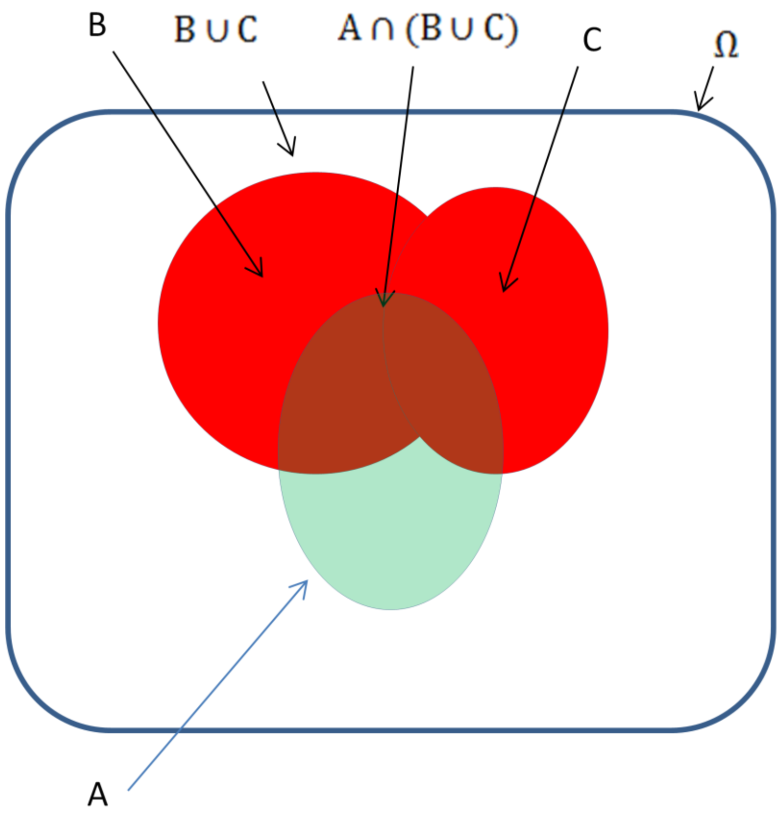
et son pendant en termes en probabilités :

$$\boxed{p(B \backslash A) = p(B) - p(A)}$$

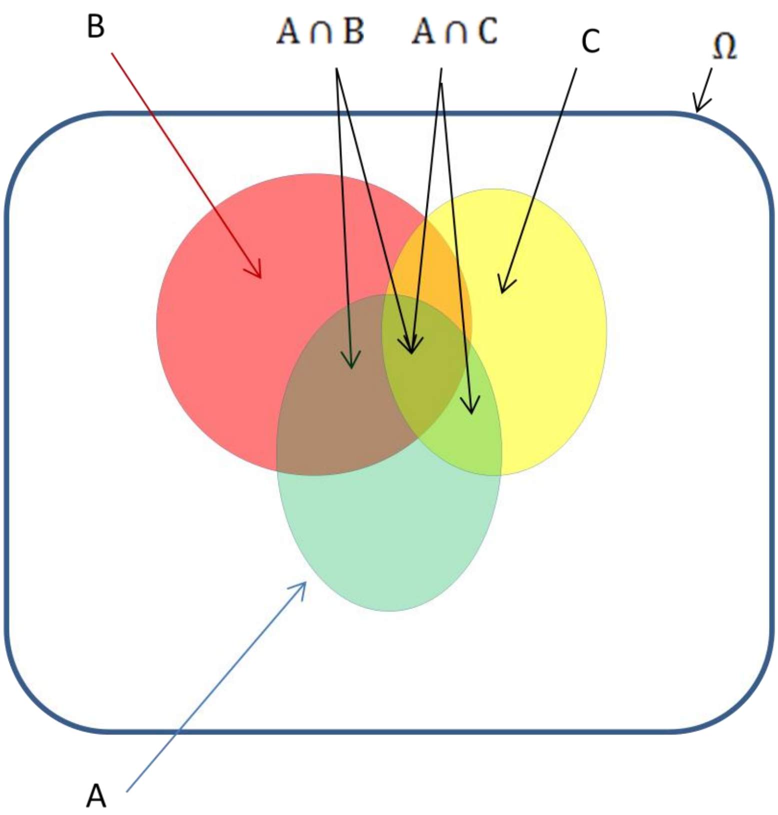
III Représentation « patatoïde » de sous ensembles

Voyons alors comment une technique de coloriage de maternelle peut nous permettre d'obtenir des propriétés que l'on demande de démontrer en classes préparatoires, avec des moyens plus sophistiqués certes, mais nous y reviendrons et expliquerons la logique de tout cela.

Considérons trois sous ensembles A, B, C d'un univers Ω et intéressons nous au sous ensemble $A \cap (B \cup C)$ en coloriant A en rouge et $B \cup C$ en vert par exemple. L'ensemble cherché est donc représenté par la zône où il y a superposition des deux couleurs (en marron sur la figure):



Considérons maintenant le sous ensemble $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et illustrons le là encore par coloriage :



Nous constatons la propriété :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Que l'on qualifie de distributivité de l'intersection sur la réunion

Nous constaterions de même par coloriage, la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection soit :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Nous allons voir maintenant, comment prouver ce fait de manière générale d'une façon plus automatique, sans passer par un coloriage enfantin, même si cette dernière technique est précieuse pour la bonne compréhension de la propriété. Ce sera le prélude d'introduction à ce fabuleux outil qu'est l'algèbre booléenne.

Nous allons pour cela créer un tableau pour $A \cap (B \cup C)$ dont les colonnes seront les sous ensembles dont nous étudions les propriétés et nous représenterons toutes les situations possibles pour un élément donné, en désignant par 1 le fait d'appartenir à l'ensemble et par 0 le fait de ne pas y appartenir.

La colonne intersection de deux ensembles est alors facile à remplir. Il suffit de multiplier les nombres.

Quant à la colonne réunion, ce n'est guère plus compliqué, il suffit d'additionner les nombres au bémol près qu'il faut penser à faire « 1+ 1 = 1 ». Voilà ce que cela donne

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Un tel tableau s'appelle une table de vérité.

Faisons alors la table de vérité de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$:

A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Nous constatons que la dernière colonne est identique dans les deux tableaux. Les sous ensembles correspondants ayant même table de vérité sont donc égaux.

A première vue, la mise en œuvre de cette méthode semble plus laborieuse que celle du coloriage mais elle a le mérite de pouvoir être automatisée. Un ordinateur peut donc se charger d'évaluer des relations logiques entre sous ensembles d'un même ensemble, c'est précieux.

Voyons alors une troisième méthode pour obtenir la relation précédente en utilisant une suite de prédicats logiques équivalents posés sur un élément x de E :

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

D'un point de vue formel, cette logique propositionnelle est complètement équivalente à la logique des tables de vérités, elle revient à travailler avec des propositions dont les sous ensembles sont solutions comme :

$$P_A(x) = " x \in A"$$

Ainsi, les équivalences :

$$x \in A \text{ et } x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

se traduisent par :

$$\boxed{P_{A\cap B}(x) \Leftrightarrow P_A(x) \text{ et } P_B(x)}$$

De même

$$x \in A \text{ ou } x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$$

donne :

$$\boxed{P_{A\cup B}(x) \Leftrightarrow P_A(x) \text{ ou } P_B(x)}$$

Faisons un dernier exercice pour voir le bon usage des tables de vérités :

Nous allons chercher à comparer les deux ensembles :

$$A\backslash(B \cap C) \quad \text{ et } \quad (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$$

Autrement dit, la complémentation est elle distributive par rapport à l'intersection. Voyons les tables de vérités :

A	B	C	B ∩ C	A\(B ∩ C)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

A	B	C	A\B	A\C	(A\B) ∩ (A\C)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0

Et là, visiblement, ce ne sont pas les mêmes tables de vérités pour la dernière colonne des deux tableaux. En revanche chaque fois qu'il y a un 1 dans le second il y a un 1 sur la même ligne dans le premier. Cela traduit une inclusion :

$$(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subset A \backslash (B \cap C)$$

Regardons pourtant d'un peu plus près en faisant la table de :

$$(A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

A	B	C	A\B	A\C	(A\B) ∪ (A\C)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

Tiens donc ! La dernière colonne est celle de notre premier tableau. Nous avons donc :

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Amusez vous à vérifier de même :

$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

Autrement dit pour les rois de la mnémotechnie, le symbole de complémentation renverse le signe d'intersection en signe de réunion en se distribuant et vice versa. Bien pratique, non ?

Si maintenant vous n'êtes pas convaincus de la beauté de l'analyse par 0 et par 1, pilier d'une algèbre dite booléenne, je rends les armes ! Non je plaisante, je suis pugnace et j'en ai amené bien d'autres que vous à aimer les maths.

Une petite remarque philosophique au passage. La transmission des informations par internet se fait au moyen de 0 et de 1, le codage des images, des vidéos, des sons n'est qu'une immense suite de 0 et de 1 matérialisés par des états réfléchissants ou non de cellules invisibles à l'œil, ce qui constitue vos supports DVD et compagnie.

S'il y a un grand horloger derrière tout cela, c'est à coups de 0 et de 1 qu'il a créé ce monde (et je ne prends pas de parti religieux)

C'est aussi le côté yin et yang de ce monde, il y a ou il n'y a pas. Tout s'analyse donc de manière binaire, ce qui ne veut pas dire réductrice, car croyez moi, les possibilités de création à partir du binaire sont infinies, regardez notre univers.

Bref laissons là les divergences philosophiques et laissez vous conquérir par ce formalisme mathématique qui n'est que l'expression de l'ordre merveilleux régnant dans notre monde, décodée dans un langage puissant et inégalé.

Mais ne vous laissez pas découragez par la pâle copie qu'on vous en donne trop souvent dans les institutions scolaires, gangrénée par souci de superficialité dans une funeste déconstruction d'un savoir patiemment élaboré depuis des millénaires !