Diagonalisation d'une somme de matrices de projection commutantes

Première partie : Avec deux projecteurs

Dans toute la suite, P et Q désignent deux matrices de projection (idempotente) d'ordre $m \geq 1$ qui commutent, c'est-à-dire vérifiant :

$$P^2 = P, \qquad Q^2 = Q, \quad P\,Q = Q\,P$$

La matrice identité d'ordre m sera désignée par I. L'espace vectoriel des colonnes formées de m nombres réels sera noté $\mathbb{E}$.

Rappelons que pour une matrice de projection, nous avons, par le théorème des noyaux :

$$\mathbb{E} = Ker(P) \oplus Ker(P - I)$$

Et donc qu'une matrice de projection est diagonalisable et que ses valeurs propres éventuelles sont 0 et 1.

Rappelons de plus que deux matrices diagonalisables qui commutent peuvent être diagonalisées dans une même base.

1) Recherche d'un polynôme annulateur simple de la matrice somme

Considérons la matrice somme :

$$F = P + Q$$

Afin de déterminer les valeurs propres de F, nous allons rechercher un polynôme annulateur simple de cette matrice, en en calculant les premières puissances :

$$F^2 = P^2 + 2\,P\,Q + Q^2 = P + Q + 2\,P\,Q = F + 2\,P\,Q$$

$$F^3 = P^3 + 3\,P^2\,Q + 3\,P\,Q^2 + Q^3 = P + 3\,P\,Q + 3\,P\,Q + Q = F + 6\,P\,Q$$

Il est donc possible d'éliminer $P\,Q$ entre ces deux dernières relations, ce qui donne :

$$F^3 - 3\,F^2 = F - 3\,F$$

Soit :

$$F^3 - 3\,F^2 + 2\,F = 0$$

Le polynôme $X^3 - 3\,X^2 + 2\,F$ est donc annulateur de la matrice F.

2) Valeurs propres éventuelles de $P+Q$

Rappelons que si un polynôme est annulateur d'une matrice carrée alors il est annulateur des valeurs propres de cette dernière. Redémontrons le dans notre cas particulier :

Soit λ une valeur propre de F et X un vecteur propre non nul associé, alors :

$$F\,X = \lambda\,X$$

$$F^2\,X = F\,\lambda\,X = \lambda\,F\,X = \lambda^2\,X$$

$$F^3\,X = F\,\lambda^2\,X = \lambda^2\,F\,X = \lambda^3\,X$$

Or :

$$F^3X - 3\,F^2X + 2\,F\,X = 0$$

Donc :

$$\lambda^3\,X - 3\,\lambda^2\,X + 2\,\lambda\,X = 0$$

$$(\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 2\,\lambda)\,X = 0$$

Et comme X n'est pas une colonne nulle :

$$\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 2\,\lambda = 0$$

D'où en factorisant :

$$\lambda\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda\,(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Donc :

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2$$

Les valeurs propres éventuelles de la matrice $P+Q$ sont donc 0, 1 et 2. Mais rien ne dit a priori que ces valeurs sont effectivement valeurs propres. Tout au plus peut on dire à ce stade qu'il y en a au moins une, car le polynôme caractéristique de $P+Q$ a un degré impair donc au moins une racine réelle.

3) Sous espaces propres éventuels de $P+Q$

a) Condition pour que 0 soit valeur propre de $P+Q$

Soit $X \in Ker(P+Q)$ alors :

$$(P+Q)\,X = 0$$

Donc :

$$(P+Q)^2\,X=0$$

Soit :

$$(P+Q+2\,P\,Q)\,X=0$$

Donc :

$$2\,P\,Q\,X=0$$

$$P\,Q\,X=0$$

Or :

$$P\,X=\ -Q\,X$$

Donc :

$$P^2\,X=\ -P\,Q\,X$$

D'où :

$$P\,X=-P\,Q\,X=0$$

Puis :

$$Q\,X=-P\,X=0$$

Finalement : $X\in Ker(P)\cap Ker(Q)$

Réciproquement, soit $X\in Ker(P)\cap Ker(Q)$ alors :

$$P\,X=\ Q\,X=0$$

Donc :

$$(P+Q)\,X=0$$

Donc $X\in Ker(P+Q)$

Il en résulte :

$$\boxed{\boldsymbol{Ker(P+Q)=Ker(P)\cap Ker(Q)}}$$

Ainsi, 0 est valeur propre de $P+Q$ si et seulement si 0 est valeur propre de P et de Q et que les sous espaces propres associés ont une intersection non nulle. Dans ce cas, cette intersection est le sous espace propre associé à la valeur propre 0 de $P+Q$.

b) **<u>Condition pour que 2 soit valeur propre de $\boldsymbol{P+Q}$</u>**

Notons que :

$$Ker(P+Q-2\,I) = Ker\big((P-I)+(Q-\ I)\big) = Ker\big((I-P)+(I-Q)\big)$$

Posons :

$$P' = I-P, \qquad Q' = I-Q$$

Alors :

$$P'^2 = I-2\,P+P^2 = I-2\,P+P = I-P = P'$$

$$Q'^2 = I-2\,Q+Q^2 = I-2\,Q+Q = I-Q = Q'$$

$$P'\,Q' = (I-P)\,(I-Q) = I-P-Q+P\,Q = I-Q-P+Q\,P = (I-Q)\,(I-P) = Q'\,P'$$

P' et Q' sont donc deux matrices de projection qui commutent. On peut donc leur appliquer le résultat précédent :

$$Ker(P'+Q') = Ker(P') \cap Ker(Q')$$

Lequel se traduit par :

$$\boxed{\boldsymbol{Ker(P+Q-2\,I) = Ker(P-I) \cap Ker(Q-I)}}$$

Ainsi, $\boldsymbol{2}$ est valeur propre de $\boldsymbol{P+Q}$ si et seulement si $\boldsymbol{1}$ est valeur propre de $\boldsymbol{P}$ et de $\boldsymbol{Q}$ et que les sous espaces propres associés ont une intersection non nulle. Dans ce cas, cette intersection est le sous espace propre associé à la valeur propre $\boldsymbol{2}$ de $\boldsymbol{P+Q}$.

c) **<u>Condition pour que 1 soit valeur propre de $\boldsymbol{P+Q}$</u>**

Notons d'abord que :

$$(P+Q)\,(P-Q)^2 = (P+Q)\,(P-Q)\,(P-Q) = (P^2-Q^2)\,(P-Q) = (P-Q)\,(P-Q)$$
$$= (P-Q)^2$$

Soit pour toute colonne X :

$$(P+Q)\,(P-Q)^2\,X = (P-Q)^2\,X$$

Notons de plus que :

$$(I-2\,P)\,(Q-P) = Q-P-2\,P\,Q+2\,P^2 = P+Q-2\,P\,Q = (P-Q)^2$$

$$(I-2\,P)^2 = I-4\,P+4\,P^2 = I$$

Donc en multipliant la précédente relation par $I-2\,P$ à gauche :

$$Q-P = (I-2\,P)\,(P-Q)^2$$

Donc si $Q \neq P$, alors $(P-Q)^2 \neq 0$ et il existe $X_0 \neq 0$ telle que $(P-Q)^2 X_0 \neq 0$

Ainsi, la colonne $X = (P - Q)^2 X_0$ est vecteur propre non nul de $P + Q$ associé à la valeur propre 1.

Réciproquement si 1 est valeur propre de $P + Q$ alors $Q \neq P$ car les valeurs propres éventuelles de $2\,P$ sont 0 et 2.

Finalement :

1 est valeur propre de $\boldsymbol{P + Q}$ si et seulement si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont distinctes.

Dans ce cas, nous avons vu :

$$Im((P - Q)^2) \subset Ker(P + Q - I)$$

Inversement, si $X \in Ker(P + Q - I)$ alors :

$$P\,X + Q\,X - X = 0$$

Donc :

$$P\,P\,X + P\,Q\,X - P\,X = 0$$

Soit :

$$P\,Q\,X = 0$$

Donc :

$$(P - Q)^2\,X = (P + Q)\,X = X$$

Donc $X \in Im((P - Q)^2)$ d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{Ker(P + Q - I) = Im\big((P - Q)^2\big)}}$$

4) Diagonalisation de $\boldsymbol{F = P + Q}$

Rappelons :

$$F\,(F - I)(F - 2\,I) = 0$$

Le théorème des noyaux permet donc d'écrire :

$$\boxed{\mathbb{E} = \boldsymbol{Ker(F) \oplus Ker(F - I) \oplus Ker(F - 2\,I)}}$$

Donc **la matrice $\boldsymbol{F = P + Q}$ est diagonalisable**

Deuxième partie : Avec un nombre quelconque de projecteurs

Dans toute la suite, $(P_i)_{i=1,n}$ désigne une famille de n matrices de projection (idempotente) d'ordre $m \geq 1$ qui commutent deux à deux.

On s'intéresse à la diagonalisation de la matrice :

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Rappelons que si une famille de n matrices est telle que les matrices commutent deux à deux et sont chacune diagonalisables, alors, on peut trouver une base de diagonalisation commune à toutes ces matrices.

Il existe donc une matrice inversible R et une famille de n matrices diagonales D_i n'ayant que des 1 ou des 0 sur leur diagonale telle que pour tout i allant de 1 à n :

$$P_i = R\, D_i\, R^{-1}$$

Alors :

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} (R\, D_i\, R^{-1}) = R \left(\sum_{i=1}^{n} D_i \right) R^{-1}$$

Soit en posant :

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

$$\boxed{F_n = R\, D\, R^{-1}}$$

Où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des entiers de l'intervalle $[\![0, n]\!]$

F_n est donc diagonalisable et les valeurs propres éventuelles de F_n sont donc les entiers de l'intervalle $[\![0, n]\!]$.

On a donc :

$$\boxed{\mathbb{E} = \boldsymbol{Ker(F_n) \oplus Ker(F_n - I) \oplus Ker(F_n - 2\, I) \oplus \ldots \oplus Ker(F_n - n\, I)}}$$

Le polynôme minimal de F_n étant un diviseur de $X\,(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$ on en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{F_n\,(F_n - I)\,(F_n - 2\,I)\ldots(F_n - n\,I) = 0}}$$

<u>Etude de $Ker(F_n)$</u>

Soit $X \in Ker(F_n)$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\, X = 0$$

Notons que :

$$\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P_j \right) \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j + (n-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P_j$$

Donc, en multipliant à gauche la précédente relation par $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} P_j$ et en distribuant, on en déduit :

$$(n-1)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} P_j\, X = 0$$

Soit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} P_j\, X = 0$$

En réitérant le procédé en multipliant à gauche par $\sum_{\substack{j=1\\j\notin\{i_i,i_2\}}}^{n} P_j$ on aura pour tout couple d'indices (i_i, i_2) tels que $0 \leq i_i < i_2 \leq n$:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\notin\{i_i,i_2\}}}^{n} P_j\;X = 0$$

Et en réitérant, pour tout triplet d'indices (i_i, i_2, i_3) tels que $0 \leq i_i < i_2 < i_3 \leq n$:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\notin\{i_i,i_2,i_3\}}}^{n} P_j\;X = 0$$

Et ainsi de suite, jusqu'à aboutir à pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$P_j\, X = 0$$

Donc :

$$Ker(F_n) \subset Ker(P_1) \cap Ker(P_2) \cap \dots \cap Ker(P_n)$$

Réciproquement :

Soit $X \in Ker(P_1) \cap Ker(P_2) \cap \dots \cap Ker(P_2)$ alors :

$$P_1\, X = P_2\, X = \cdots = P_n\, X = 0$$

Donc :

$$P_1\, X + P_2\, X + \cdots + P_n\, X = 0$$

Donc $X \in Ker(F_n)$:

D'où

$$\boxed{\boldsymbol{Ker(F_n) = Ker(P_1) \cap Ker(P_2) \cap \dots \cap Ker(P_n)}}$$

Ainsi, 0 est valeur propre de $\boldsymbol{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$ si et seulement si 0 est valeur propre de chacun des $\boldsymbol{P_i}$ et que les sous espaces propres associés ont une intersection non nulle. Dans ce cas, cette intersection est le sous espace propre associé à la valeur propre 0 de $\boldsymbol{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$.

Etude de $Ker(F_n - n\,I)$

Notons que :

$$Ker(F_n - n\,I) = Ker\big((I-P_1)+(I-P_2)+\cdots+(I-P_n)\big)$$

Et que les n matrices de projection $I-P_i$ commutent deux à deux. Donc le résultat précédent s'applique et donne :

$$\boldsymbol{Ker(F_n - n\,I) = Ker(P_1 - I) \cap Ker(P_2 - I) \cap \ldots \cap Ker(P_n - I)}$$

Ainsi, n est valeur propre de $P_1+P_2+\cdots+P_n$ si et seulement si 1 est valeur propre de chacun des P_i et que les sous espaces propres associés ont une intersection non nulle. Dans ce cas, cette intersection est le sous espace propre associé à la valeur propre n de $P_1+P_2+\cdots+P_n$.

Décomposition d'un vecteur sur les sous espaces propres :

Introduisons les polynômes de Lagrange définis pour $0 \le k \le n$:

$$L_k(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(k-i)}\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-i) = l_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-i)$$

Ces polynômes vérifient :

$$L_k(k) = 1$$

Et pour $0 \le j \le n, j \neq k$

$$L_k(j) = 0$$

Ainsi que :

$$L_0(X) + L_2(X) + \cdots + L_n(X) = 1$$

Donc :

$$L_0(F_n) + L_2(F_n) + \cdots + L_n(F_n) = I$$

Et pour toute colonne X :

$$\boldsymbol{L_0(F_n)X + L_2(F_n)X + \cdots + L_n(F_n)X = X}$$

Or pour $0 \le k \le n$:

$$(F_n - k\,I)\,L_k(F_n)\,X = (F_n - k\,I)\,l_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(F_n - i\,I)\,X = \ l_k\prod_{i=0}^{n}(F_n - i\,I)\,X = 0$$

Donc :

$$\boldsymbol{L_k(F_n)\,X \in Ker(F_n - k\,I)}$$

La décomposition précédente donne donc la décomposition d'une colonne X de $\mathbb{E}$ sur les sous espaces propres de F_n qui sont les sous espaces $Ker(F_n - k\,I)$ non réduits au vecteur nul pour $0 \le k \le n$

A noter que la matrice $L_k(F_n)$ est la matrice de la projection sur $Ker(F_n - k\ I)$ dans la direction de la somme des autres sous espaces $Ker(F_n - i\ I)$