Les nombres complexes (construction)

Les nombres complexes font partie des joyaux des Mathématiques, tant ils facilitent la description de nombreux phénomènes physiques et la résolution des problèmes qui leurs sont associés. Il n'y a qu'à penser à l'emploi des impédances complexes en électricité, ou à la description d'une onde à l'aide d'une fonction complexe. Ils sont également une aide précieuse dans la géométrie pour faciliter les démonstrations.

Nous allons dans un premier temps, proposer une démarche logique menant à leur introduction puis leur construction, nous verrons alors quelles applications remarquables nous pouvons en faire.

I <u>Un problème de décomposition</u>

Considérons une expression dite rationnelle comme :

$$\boxed{f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x^2-1)} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-1)(x+1)}}$$

Nous savons, par une technique qualifiée de décomposition en éléments simples, qu'elle peut se mettre sous la forme d'une somme de quotients plus simples :

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

a, b, c sont trois nombres réels pouvant être obtenus par identification après mise du second membre au dénominateur commun.

Mais il y a une méthode plus rapide pour obtenir a, b, c.

Pour obtenir a, multiplions l'expression dans les deux membres par $(x-2)$. Cela donne :

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = a + \frac{b\,(x-2)}{x-1} + \frac{c\,(x-2)}{x+1}$$

Les deux expressions étant égales pour tous les nombres x distincts de -1, 1 et 2, nous pouvons faire tendre x vers 2 et écrire l'égalité des limites pour les deux membres. Cela donne :

$$\boxed{\frac{7}{3} = a}$$

Un procédé analogue conduit à :

$$\boxed{-\frac{5}{2} = b}$$

$$\boxed{\frac{1}{6} = c}$$

D'où la décomposition :

$$\boxed{\frac{2\,x+3}{(x-2)(x^2-1)} = \frac{7}{3\,(x-2)} - \frac{5}{2\,(x-1)} + \frac{1}{6\,(x+1)}}$$

Cette décomposition présente de nombreux avantages, notamment celui de déterminer facilement une primitive F(x) de f(x), à savoir :

$$\boxed{F(x) = \frac{7}{3}\,\mathrm{Ln}|x-2| - \frac{5}{2}\,\mathrm{Ln}|x-1| + \frac{1}{6}\,\mathrm{Ln}|x+1|}$$

Changeons alors légèrement f(x) de la façon suivante :

$$\boxed{f(x) = \frac{2\,x+3}{(x-2)(x^2+1)}}$$

Nous aimerions appliquer la méthode précédente, qui suppose être en mesure de factoriser le dénominateur en produits de polynômes de degré 1.

Mais comme chacun sait, le polynôme x^2+1 n'est pas factorisable, sinon il s'annulerait en au moins une valeur x telle que $x^2=-1$.

Alors que faire ? Ce que l'on fait depuis des millénaires en Mathématiques : de l'audace, de l'audace !

Et l'audace consiste à imaginer un nombre noté i (comme imaginaire) tel que

$$\boxed{x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)}$$

Autrement dit, un nombre i tel que :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Avec beaucoup d'audace qui s'appelle plus du culot, nous pourrions même écrire :

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Bien sûr, je vous rassure tout de suite, je ne suis pas fou et vous non plus. Un tel nombre réel n'existe pas. Alors pourquoi l'imaginer, me direz-vous ? Un peu de patience, vous allez bientôt comprendre …

Reprenons le principe de notre décomposition « imaginaire » cette fois-ci (donc a priori dénuée de sens) :

$$\boxed{\frac{2\,x + 3}{(x - 2)(x - i)(x + i)} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x - i} + \frac{c}{x + i}}$$

Comme auparavant, nous déduisons a, b, c en multipliant l'égalité dans les deux membres par $(x - 2)$, $(x - i)$, $(x + i)$ successivement.

Nous en déduisons :

$$a = \frac{7}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{7}{2^2 - i^2} = \frac{7}{4 + 1} = \frac{7}{5}$$

$$b = \frac{2\,i + 3}{(i - 2)(i + i)} = \frac{2\,i + 3}{(i - 2)(2\,i)} = \frac{2\,i + 3}{2\,i^2 - 4\,i} = \frac{2\,i + 3}{-2 - 4\,i}$$

$$b = \frac{(2\,i + 3)(-2 + 4\,i)}{(-2 - 4\,i)(-2 + 4\,i)} = \frac{-\,4\,i + 8\,i^2 - 6 + 12\,i}{4 - (4\,i)^2} = \frac{-\,4\,i - 8 - 6 + 12\,i}{4 + 16}$$

$$b = \frac{-14 + 8\,i}{20} = \frac{-7 + 4\,i}{10}$$

Un calcul laborieux analogue donnerait :

$$c = \frac{-7 - 4\,i}{10}$$

Nous pourrions donc écrire, toujours avec notre grand culot :

$$\frac{2\,x + 3}{(x - 2)(x - i)(x + i)} = \frac{7}{5(x - 2)} + \frac{-7 + 4\,i}{10(x - i)} + \frac{-7 - 4\,i}{10(x + i)}$$

Soit en mettant les deux derniers termes au même dénominateur :

$$\frac{2\,x + 3}{(x - 2)(x - i)(x + i)}$$

$$= \frac{7}{5(x - 2)} + \frac{(-7 + 4\,i)(x + i)}{10(x - i)(x + i)} + \frac{(-7 - 4\,i)(x - i)}{10(x + i)(x - i)}$$

$$= \frac{7}{5(x - 2)} + \frac{-7\,x - 7\,i + 4\,i\,x - 4 - 7\,x + 7\,i - 4\,i\,x - 4}{10(x - i)(x + i)}$$

$$\frac{7}{5(x - 2)} + \frac{-14\,x - 8}{10(x^2 + 1)}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{2\,x + 3}{(x - 2)(x^2 + 1)} = \frac{7}{5(x - 2)} - \frac{7\,x + 4}{5(x^2 + 1)}}$$

Ouf ! Nous sommes parvenus à trouver une décomposition et comble de bonheur, ce fichu i n’y figure pas !

Mais comme nous avons utilisé un nombre i qui n’existe pas, notre méthode n’a a priori, aucun sens.

Voyons quand même, par hasard, si les deux expressions ci-dessus ne sont pas égales. Ce serait miraculeux !

Partons du membre de droite et mettons-le au même dénominateur :

$$\frac{7}{5(x - 2)} - \frac{7\,x + 4}{5(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{7\,(x^2 + 1)}{5(x - 2)(x^2 + 1)} - \frac{(7\,x + 4)(x - 2)}{5(x^2 + 1)(x - 2)}$$

$$= \frac{7\,x^2 + 7 - 7\,x^2 + 14\,x - 4\,x + 8}{5(x-2)(x^2+1)}$$

$$\frac{10\,x + 15}{5(x-2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{2\,x + 3}{(x-2)(x^2+1)}$$

Incroyable !!! A partir d'un traitement injustifiable avec un nombre imaginé i dont le carré vaut -1, nous sommes parvenus à une décomposition, qui elle est juste.

Nous invitons le lecteur à tester d'autres décompositions et vérifier que cela marche à chaque fois.

Cette situation étrange invite à se demander sérieusement s'il serait possible de donner un véritable sens à ce nombre i, ce qui revient à construire un ensemble plus vaste que l'ensemble des nombres réels et que l'on appellerait ensemble des **nombres complexes**.

Pour cela, il faut commencer par se poser une question simple. Quelles propriétés ont les nombres vis-à-vis des opérations de base que sont l'addition et la multiplication, les deux autres opérations, soustraction et division étant déduites des deux premières.

II La structure des nombres

Commençons par les propriétés de l'addition. Nous pouvons en distinguer quatre sur l'ensemble le plus large des nombres réels :

La commutativité (C):

C'est le fait de pouvoir échanger les places entre deux nombres ajoutés :

$$\boxed{a + b = b + a}$$

L'associativité (A):

C'est le fait de pouvoir exécuter les opérations d'addition en changeant l'ordre des priorités :

$$(a + b)+c = a+(b + c)$$

L'existence d'un élément neutre (N):

C'est le fait qu'il existe un nombre qui est sans effet dans l'addition, le zéro.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

L'existence d'un symétrique (S) :

C'est le fait que pour tout nombre a, il existe un nombre qui, ajouté à lui, donne l'élément neutre.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

On l'appelle plus volontiers opposé.

Voyons alors les propriétés de la multiplication, assez semblables :

La commutativité (C):

C'est le fait de pouvoir échanger les places entre deux nombres multipliés :

$$a \times b = b \times a$$

L'associativité (A):

C'est le fait de pouvoir exécuter les opérations de multiplication en changeant l'ordre des priorités :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

L'existence d'un élément neutre (N):

C'est le fait qu'il existe un nombre qui est sans effet dans la multiplication, le 1.

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

L'existence d'un symétrique (S^*) :

C’est le fait que pour tout nombre a différent de 0, il existe un nombre qui, multiplié par lui, donne l’élément neutre.

$$\mathrm{a} \times \frac{1}{\mathrm{a}} = \frac{1}{\mathrm{a}} \times \mathrm{a} = 1$$

On l’appelle plus volontiers <u>inverse</u>.

Enfin la multiplication a une propriété vis-à-vis de l’addition :

<u>La distributivité</u> (D):

A gauche :

$$\boxed{\mathrm{a} \times (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{a} \times \mathrm{b} + \mathrm{a} \times \mathrm{c}}$$

et … à droite

$$\boxed{(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \times \mathrm{c} = \mathrm{a} \times \mathrm{c} + \mathrm{b} \times \mathrm{c}}$$

On traduit alors cela en disant que l’ensemble des nombres réels a, vis-à-vis de l’addition et de la multiplication, une structure de **corps commutatif**.

Nous écrirons pour simplifier :

$$\boxed{(\mathbb{R}, +, \times) \text{ de structure CANS CANS}^*\text{D}}$$

Pour les entiers naturels, il faut enlever l’opposé et l’inverse. La structure est alors :

$$\boxed{(\mathbb{N}, +, \times) \text{ de structure CAN CAND}}$$

Pour les entiers relatifs, il faut enlever seulement l’inverse. La structure, appelée structure **d’anneau commutatif**, est alors :

$$\boxed{(\mathbb{Z}, +, \times) \text{ de structure CANS CAND}}$$

Pour les décimaux, c’est la même structure :

$$\boxed{(\mathrm{D}, +, \times) \text{ de structure CANS CAND}}$$

Pour les nombres rationnels, nous avons une structure de corps commutatif comme pour les nombres réels :

$$(\mathbb{Q}, +, \times) \text{ de structure CANS CANS}^*\text{D}$$

L'idée pour construire l'ensemble des nombres complexes, qui sera noté $\mathbb{C}$, est de construire un ensemble minimal ayant la même structure que $\mathbb{R}$ mais possédant un élément i en plus, dont le carré vaut -1.

On le formule ainsi en mathématiques :

$\mathbb{C}$ doit être le plus petit corps contenant $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$.

On le note : $\mathbb{R}(\mathrm{i})$ou $\mathbb{R}\left(\sqrt{-1}\right)$

Mais est ce possible de construire un tel corps ? Nous allons voir que oui, « à un isomorphisme près » comme disent les matheux mais nous expliquerons cela clairement.

Auparavant, nous allons nous intéresser à un problème similaire mais plus simple, qui va nous guider vers la solution, à savoir : Trouver le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et le nombre $\sqrt{2}$ que nous noterons $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

II Le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et le nombre $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, tout d'abord, n'est pas un nombre rationnel comme chacun sait, enfin… revoyons une preuve simple. Si il en était ainsi, il devrait exister deux entiers m et n tels que l'on ait :

$$\frac{n}{m} \times \frac{n}{m} = 2$$

Ce qui revient à dire qu'il existe un carré d'aire égale à 2 et de côté mesurable par une fraction d'entiers.

Nous devrions avoir alors :

$$n \times n = 2 \times m \times m$$

Ceci est absurde, car nous avons un nombre entier naturel dans chaque membre et si nous tenons compte du fait qu'un entier naturel se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers, le nombre du membre de gauche aurait un nombre pair de 2 et celui de droite, un nombre impair.

Nous sommes donc assurés que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est strictement plus grand que $\mathbb{Q}$.

Or $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ devant être un corps, il doit contenir tous les produits de nombres b de $\mathbb{Q}$ avec $\sqrt{2}$.

Mais les nombres de la forme b $\sqrt{2}$ n'étant pas des rationnels, il faut au minimum considérer les nombres de la forme : $a + b\sqrt{2}$ avec a et b rationnels, comme par exemple :

$$1+\sqrt{2}, \quad -5+\frac{3}{7}\sqrt{2}, \qquad \frac{243}{100}-\frac{1}{9}\sqrt{2}$$

Or quelques opérations sur des nombres de ce type montrent qu'on aboutit à des nombres de même forme, ainsi :

$$(-5+3\sqrt{2})+(1-6\sqrt{2})=(-4-3\sqrt{2})$$

$$(-5+3\sqrt{2})\times(1-6\sqrt{2})=(31+33\sqrt{2})$$

De plus l'opposé de $(-5+3\sqrt{2})$ est $(5-3\sqrt{2})$ donc du même type.

Les éléments neutres additifs et multiplicatifs en sont car :

$$\boxed{0=0+0\sqrt{2} \quad \text{et} \quad 1=1+\ 0\sqrt{2}}$$

Voyons pour l'inverse en notant d'abord que le produit de $-5+3\sqrt{2}$ par le nombre $-5+3\sqrt{2}$, appelé son conjugué, est un nombre rationnel :

$$(-5+3\sqrt{2})\times(-5-3\sqrt{2})=7$$

De telle sorte que :

$$(-5+3\sqrt{2})\times\left(-\frac{5}{7}-\frac{3}{7}\sqrt{2}\right)=1$$

L'inverse de $-5 + 3\sqrt{2}$ est donc bien un nombre du même type.

Il semble donc que nous ayons là toutes les propriétés d'un corps.

Formulons alors la conjecture :

Le plus petit corps contenant l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est l'ensemble :

$$\boxed{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Q}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{Q}\}}$$

Prouvons cette conjecture :

L'addition et la multiplication étant commutatives, associatives dans $\mathbb{R}$, elles le sont a fortiori dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De même, la distributivité s'y conserve.

Nous avons vu précédemment que les éléments neutres 0 et 1 des deux opérations étaient dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Reste à examiner si les opposés et les inverses de nombres non nuls restent dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

La réponse est affirmative car l'opposé du nombre $\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est le nombre $(-a) + (-b)\sqrt{2}$ qui est encore dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

De même l'identité du produit d'un nombre par son conjugué:

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{2}) \times (\mathrm{a} - \mathrm{b}\sqrt{2}) = \mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{b}^2$$

Conduit à :

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{2}) \times \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{b}^2} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{b}^2}\sqrt{2}\right) = 1$$

Ce qui prouve que si $\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{2}$ n'est pas nul, ce qui équivaut à a et b non nuls tous les deux, alors l'inverse de $\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{2}$ est le nombre :

$$\boxed{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{b}^2} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{b}^2}\sqrt{2}}$$

Ne perdant pas de vue que $\mathbb{Q}$ est un corps nous avons :

$$\frac{a}{a^2 - 2\,b^2} \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \; -\frac{b}{a^2 - 2\,b^2} \in \mathbb{Q}$$

L'inverse de $a + b\sqrt{2}$ est donc un nombre de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ce qui achève de prouver que ce dernier ensemble est un corps et il n'y en a évidemment pas de plus petit contenant $\mathbb{Q}$.

Ouahhh ! Mais alors, pour construire l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme étant le plus petit corps contenant l'ensemble des nombres réels et un nombre $i =$ « $\sqrt{-1}$ », on pourrait s'inspirer de cette méthode. Voyons.

IV Construction du corps des nombres complexes

Ca y est, je sens des palpitations chez mes lecteurs, il se pourrait qu'on sache bientôt ce qu'est « concrètement » cet étrange nombre imaginaire i.

Eh bien, pas tout à fait encore. Il va nous falloir « bricoler » encore un peu et faire « comme si » avec beaucoup de culot.

Supposons de ce fait qu'un plus petit corps $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $i^2 = -1$ existe. Alors, par les mêmes remarques faites pour $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nous devrions avoir :

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1}) = \mathbb{R}(i) = \{\, a + b\,i, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b \in \mathbb{R}\}$$

Examinons alors l'addition et la multiplication de plus près pour de tels nombres, en utilisant les propriétés des opérations :

Pour l'addition, par commutativité et associativité :

$$(a + b\,i) + (a' + b'i) = (a + a') + (b\,i + b'\,i)$$

Et par factorisation de i (conséquence de la distributivité)

$$\boxed{(a + b\,i) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')\,i}$$

Pour le produit, par distributivité (développement) :

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}) \times (\mathrm{a}' + \mathrm{b}'\mathrm{i}) = \mathrm{a\,a}' + \mathrm{a\,b}'\mathrm{i} + \mathrm{b\,a}'\mathrm{i} + \mathrm{b\,b}'\mathrm{i}^2$$

Puis, sachant $\mathrm{i}^2 = -1$, par commutativité, associativité et factorisation de i :

$$\boxed{(\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}) \times (\mathrm{a}' + \mathrm{b}'\mathrm{i}) = (\mathrm{a\,a}' - \mathrm{b\,b}') + (\mathrm{a\,b}' + \mathrm{a}'\mathrm{b})\,\mathrm{i}}$$

Nous voyons que l'addition et la multiplication de deux nombres de la forme $\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}$ est un nombre de la même forme.

L'opposé de $\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}$ serait alors (-a) + (-b) i

L'inverse s'obtiendrait en notant que le produit d'un nombre $\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}$ par son conjugué a – b i serait un nombre réel :

$$\boxed{(\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}) \times (\mathrm{a} - \mathrm{i\,b}) = \mathrm{a}^2 - (\mathrm{i\,b})^2 = \mathrm{a}^2 - \mathrm{i}^2\,\mathrm{b}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$$

Et de ce fait pour un nombre $\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}$ non nul, ce qui équivaut à a et b non nuls :

$$\boxed{(\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}) \times \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}\,\mathrm{i}\right) = 1}$$

L'inverse de $\mathrm{a} + \mathrm{b\,i}$ non nul serait alors :

$$\boxed{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{b\,i}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}}$$

Tout cela est bien beau, mais ça ne nous dit toujours pas ce qu'est le nombre mystérieux i.

C'est normal puisque, jusqu'à présent, notre démarche semble insensée, ce qui est généralement le prélude à de grandes découvertes…

Alors comment la rendre sensée, pour que nous puissions l'employer avec raison et non comme un tour de magie.

La clé consiste à changer de point de vue (j'ai entendu dire qu'Einstein le disait souvent).

Il apparaît qu'un nombre complexe doive être défini à partir de deux nombres réels a et b. Si a a un sens, b multiplié par i n'en a pas. De ce fait b est appelé **partie imaginaire** et a **partie réelle**.

Puisqu'il faut considérer deux nombres de nature différente, la manière la plus commode est de constituer ce que l'on appelle en Mathématiques un couple noté (a ; b).

Nous sommes alors naturellement amenés à définir des opérations notées abusivement + et × sur ces couples de la façon suivante :

$$(\mathbf{a}\;;\;\mathbf{b}) + (\mathbf{a}'\;;\;\mathbf{b}').= (\mathbf{a}+\mathbf{a}';\mathbf{b}+\mathbf{b}')$$

$$(\mathbf{a}\;;\;\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}'\;;\;\mathbf{b}').= (\mathbf{a}\,\mathbf{a}'-\mathbf{b}\,\mathbf{b}';\mathbf{a}\,\mathbf{b}'+\mathbf{a}'\mathbf{b}\;)$$

Il nous faut cependant considérer les nombres réels comme des couples pour qu'ils puissent être étendus à des nombres complexes.

Nous poserons ainsi :

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \{(\mathrm{a};0)\,,\qquad \mathrm{a}\in\mathbb{R}\}$$

Nous notons alors que :

$$(\mathbf{a}\;;\mathbf{0}) + (\mathbf{a}'\;;\;\mathbf{0}).= (\mathbf{a}+\mathbf{a}';\mathbf{0})$$

$$(\mathbf{a}\;;\;\mathbf{0}) \times (\mathbf{a}'\;;\;\mathbf{0}).= (\mathbf{a}\,\mathbf{a}';\mathbf{0}\;)$$

Il est alors aisé, à partir de là, de vérifier que l'ensemble $\widetilde{\mathbb{R}}$ des couples de la forme (a ;0) avec a réel est un corps de même structure que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. On dit qu'il lui est « isomorphe »

Bon $\widetilde{\mathbb{R}}$ n'est pas $\mathbb{R}$ mais qu'est ce que ça fait !. Il n'y a qu'à penser à l'usage du nombre réel pour se repérer sur un axe des abscisses gradué. Si on rajoute un axe des ordonnées perpendiculaire, tout point de l'axe des abscisses peut bien être décrit par un couple (a ;0), a étant son abscisse, son ordonnée étant nulle.

C'est donc à ce prix que nous pourrons construire le corps des complexes $\mathbb{C}$ comme extension du corps $\widetilde{\mathbb{R}}$ et non du corps $\mathbb{R}$.

Il est donc faux de dire que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, à moins de confondre $\mathbb{R}$ et $\widetilde{\mathbb{R}}$, donc l'écriture a et l'écriture (a ;0) mais je vous rassure, nous le ferons allègrement, car la simplification des notations est au cœur de l'aventure mathématique.

Pour l'instant, restons rigoureux et ne le faisons pas encore.

Posons donc :

$$\boxed{\mathbb{C} = \{(\mathbf{a};\mathbf{b}) \,, \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}\,\}}$$

Et formons la conjecture :

$\mathbb{C}$, muni de ses opérations + et ×, a une structure de corps commutatif.

Prouvons là en commençant par les propriétés de l'addition :

<u>Commutativité</u> :

$$(a\,;\ b) + (a'\,;\ b') = (a + a'; b + b')$$

$$(a'\,;\ b') + (a\,;\ b) = (a' + a; b' + b)$$

Donc :

$$\boxed{(a\,;\ b) + (a'\,;\ b') = (a'\,;\ b') + (a\,;\ b)}$$

<u>Associativité</u> :

$$[(a\,;\ b) + (a'\,;\ b')] + (a''; b'') = \big((a + a') + a''; (b + b') + b''\big)$$

$$(a\,;\ b) + [(a'\,;\ b') + (a''; b'')] = \big(a + (a' + a''); b + (b' + b'')\big)$$

Donc :

$$\boxed{[(a\,;\ b) + (a'\,;\ b')] + (a''; b'') = (a\,;\ b) + [(a'\,;\ b') + (a''; b'')]}$$

<u>Elément neutre (0 ; 0)</u> :

$$\boxed{(a\,;\ b) + (0\,;\ 0) = (0\,;\ 0) + (a\,;\ b) = (a\,; b)}$$

<u>Symétrique</u> :

$$\boxed{(a\,;\ b) + (-a\,;\ -b) = (-a\,;\ -b) + (a\,;\ b) = (0\,; 0)}$$

Voyons maintenant les propriétés de la multiplication :

Commutativité :

$$(a\,;\ b)\times(a'\,;\ b')=(a\,a'-b\,b';a\,b'+\ a'b)$$

$$(a'\,;\ b')\times(a\,;\ b)=(a'a-b'b\,;a'b+a\,b')$$

Donc :

$$\boxed{(a\,;\ b)\times(a'\,;\ b')=(a'\,;\ b')\times(a\,;\ b)}$$

Associativité :

D'une part :

$$[(a\,;\ b)\times(a'\,;\ b')]\times(a'';b'')$$

$$=(a\,a'-b\,b';a\,b'+\ b\,a';a\,b'+\ a'b)\times(a'';b'')$$

$$=(a\,a'a''-b\,b'a''-a\,b'b''-b\,a'\,b'';a\,a'b''-b\,b'b''+a\,b'a''+b\,a'\,a'')$$

D'autre part :

$$(a\,;\ b)\times[(a'\,;\ b')\times(a'';b'')]$$

$$=(a\,;\ b)\times(a'\,a''-b'\,b'';a'\,b''+\ b'a'')$$

$$=(a\,a'a''-a\,b'b''-b\,a'b''-b\,b'a'';a\,a'b''+a\,b'a''+b\,a'a''-b\,b'b'')$$

On constate donc :

$$\boxed{[(a\,;\ b)\times(a'\,;\ b')]\times(a'';b'')=(a\,;\ b)\times[(a'\,;\ b')\times(a'';b'')]}$$

Elément neutre (1 ; 0) :

$$\boxed{(a\,;\ b)\times(1\,;\ 0)=(1\,;\ 0)\times(a\,;\ b)=(a\,;b)}$$

Symétrique pour (a ; b) ≠ (0 ; 0):

Notant :

$$\boxed{(a\,;\ b)\times\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ;\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ;\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)\times(a\,;\ b)=(1;0)}$$

Le symétrique de (a ; b) ≠ (0 ; 0) est donc :

$$\boxed{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ;\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)}$$

Reste à examiner la distributivité de + par rapport à × :

D'une part :

$$(a\,;\,b)\times[(a'\,;\,b')+(a'';b'')]$$
$$=(a\,;\,b)\times(a'+a'';\,b'+b'')$$
$$=(a\,a'+a\,a''-b\,b'-b\,b''\,;\,a\,b'+a\,b''+b\,a'+b\,a'')$$

D'autre part :

$$(a\,;\,b)\times(a'\,;\,b')+(a\,;\,b)\times(a'';b'')$$
$$=(a\,a'-b\,b'\,;\,ab'+a'b)+(a\,a''-b\,b'';\,a\,b''+a''b)$$
$$=(a\,a'-b\,b'+a\,a''-b\,b''\,;\,a\,b'+a'b+ab''+a''b)$$

Là encore, on constate :

$$\boxed{(a\,;\,b)\times[(a'\,;\,b')+(a'';b'')]=(a\,;\,b)\times(a'\,;\,b')+(a\,;\,b)\times(a'';b'')}$$

Nous avons ainsi prouvé que notre ensemble de couples de réels $\mathbb{C}$ avait une structure de corps commutatif.

D'autre part, il contient bien un corps commutatif $\widetilde{\mathbb{R}}$ qui ressemble « comme deux gouttes d'eau » à $\mathbb{R}$ (qui lui est isomorphe pour être plus matheux).

Reste à savoir s'il possède un élément i dont le carré vaut -1.

Considérons le couple (0 ; 1) et multiplions le par lui-même :

$$(0\,;\,1)\times(0\,;\,1)=(-1;0)$$

Ah bah, ça alors ! le résultat est le nombre de $\widetilde{\mathbb{R}}$ associé au nombre -1 de $\mathbb{R}$ par l'isomorphisme.

Nous allons donc poser gaillardement :

$$\boxed{i=(0\,;\,1)}$$

Eh bien oui ! Chers lecteurs (lectrices), le voilà débusqué l'animal étrange, celui qui désespère tant d'étudiants, qui le regardent comme deux ronds de frites. J'espère que cette fois-ci, il ne sera plus si imaginaire que cela, car le couple (0 ; 1), c'est bien concret !

Mais ce n'est pas fini, ne partez pas, le plus beau arrive maintenant.

Notez ceci pour tout couple (a ; b) de $\mathbb{C}$:

D'une part :

$$(\mathrm{a}\,;\ \mathrm{b}) = (\mathrm{a}\,;\ 0) + (0\,;\ \mathrm{b})$$

D'autre part :

$$(0\,;\ \mathrm{b}) = (\mathrm{b}\,; 0) \times (0\,;\ 1)$$

De telle sorte que :

$$\boxed{(\mathrm{a}\,;\ \mathrm{b}) = (\mathrm{a}\,;\ 0) + [(\mathrm{b}\,; 0) \times (0\,;\ 1)]}$$

Vous allez me dire : Ouille ouille ouille ! C'est plein de parenthèses partout, et en plus il y a des couples, ça donne mal à la tête.

Je suis d'accord avec vous et c'est là que l'art mathématique prend tout son sens, par la simplification d'écriture.

Nous allons convenir de remplacer dans les écritures, les couples de la forme (a ; 0) par le nombre réel a et le couple (0 ; 1) par le symbole i.

Nous avons alors, en notant z un couple (a ; b) quelconque :

$$z = (\mathrm{a}\,;\ \mathrm{b}) = \mathrm{a} + [\mathrm{b} \times \mathrm{i}]$$

Une ultime simplification consiste à accorder une priorité à la multiplication dans une écriture sans parenthèses vis-à-vis de l'addition et à omettre le signe × entre deux lettres, mais ça, vous connaissez déjà. D'où l'écriture :

$$\boxed{z = (\mathrm{a}\,;\ \mathrm{b}) = \mathrm{a} + \mathrm{b}\,\mathrm{i}}$$

Avec la propriété :

$$\mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$$

notée plus simplement :

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

Wouahhh !! Génial ! Vive les Maths !

En confondant les écritures de $\widetilde{\mathbb{R}}$ et de $\mathbb{R}$, nous pouvons dire haut et fort :

Il existe un plus petit corps commutatif noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ (à un isomorphisme près) et un nombre i tel que $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$. Ce corps est défini par :

$$\mathbb{C} = \{\, \mathbf{a} + \mathbf{b}\,\mathbf{i}, \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}\}$$

Les opérations d'additions s'en déduisent :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}\,\mathbf{i}) + (\mathbf{a}' + \mathbf{b}'\mathbf{i}) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}') + (\mathbf{b} \ + \mathbf{b}'\ )\,\mathbf{i}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}\,\mathbf{i}) \times (\mathbf{a}' + \mathbf{b}'\mathbf{i}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{a}' - \mathbf{b}\,\mathbf{b}') + (\mathbf{a}\,\mathbf{b}' + \mathbf{a}'\mathbf{b})\,\mathbf{i}$$

Vous pouvez donc à présent vous amuser avec ce petit i comme si c'était un nombre réel et quand vous l'aurez apprivoisé, vous ne pourrez plus vous en passer.