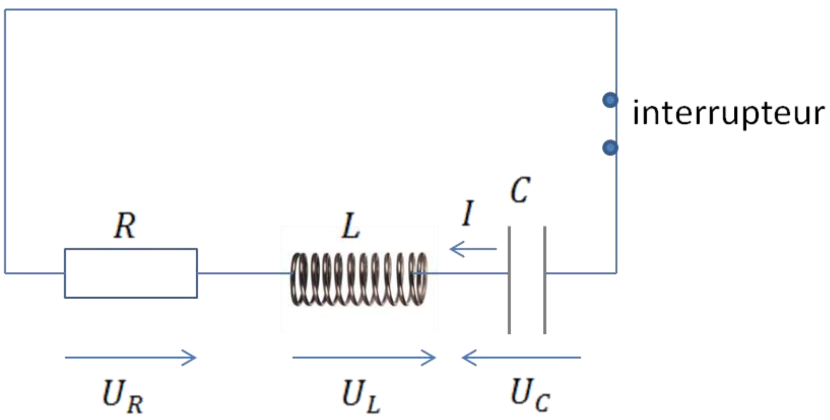
Circuit R L C- filtre fréquentiel

Un circuit R L C est composé d'un résistor de résistance R mis en série avec un condensateur et avec une self d'inductance R. Nous allons étudier deux types de circuits. L'un pour lequel le circuit est alimenté par une source de tension alternative et l'autre pour lequel le système est bouclé sur lui-même. Nous verrons alors l'utilité d'un tel système en tant que filtre fréquentiel. C'est le principe utilisé dans les Tuner de radio pour sélectionner une émission diffusée sur un canal de fréquence donné.

I **<u>Circuit R L C bouclé sur lui même</u>** :



Le circuit est fermé à l'instant $t = 0$, le condensateur portant une charge Q_{max} à cet instant.

La loi d'additivité des tensions s'écrit alors :

$$U_R + U_L = U_C$$

Les lois tension-intensité des différents dipôles sont par ailleurs :

$$U_R = R\ I$$

$$U_L = L\ \frac{dI}{dt}$$

$$-I = C\ \frac{dU_C}{dt}$$

En reportant dans la première équation, il vient :

$$-R\ C\ \frac{dU_C}{dt} + L\ \frac{d}{dt}\left(-C\ \frac{dU_C}{dt}\right) = U_C$$

soit, en normalisant l'équation :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\ \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{L\ C}\ U_C = 0$$

On reconnait une forme classique d'équation différentielle du second ordre, où on pose :

$$2\ \alpha = \frac{R}{L}$$

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{L\ C}$$

L'équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\ \alpha\ \frac{dU_C}{dt} + {\omega_0}^2\ U_C = 0}$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2\ \alpha\ r + {\omega_0}^2 = 0$$

de discriminant :

$$\Delta = 4\ \alpha^2 - 4\ {\omega_0}^2$$

En supposant, ce qui est le cas couramment rencontré, que l'on a : $\alpha \ll \omega_0$ on a :

$$\Delta \approx -4\ {\omega_0}^2 = (2\ j\ \omega_0)^2$$

Les racines complexes conjuguées sont donc :

$$r_1 = \frac{-\ 2\ \alpha -\ 2\ j\ \omega_0}{2} = -\alpha -\ j\ \omega_0$$

$$r_2 = \frac{-\ 2\ \alpha -\ 2\ j\ \omega_0}{2} = -\alpha +\ j\ \omega_0$$

Une base de solutions est alors formée par les deux fonctions :

$$\exp\left((-\alpha -\ j\ \omega_0)t\right)\ = \exp(-\alpha\ t)\ \ (\cos(\omega_0\ t) - j\ \sin(\omega_0\ t))$$

$$\exp\left((-\alpha + j\ \omega_0)t\right)\ = \exp(-\alpha\ t)\ \ (\cos(\omega_0\ t) + j\ \sin(\omega_0\ t))$$

La solution générale est donc de la forme :

$$U_C = \exp(-\alpha\ t)\ (A\ \cos(\omega_0\ t) + B\ \sin(\omega_0\ t))$$

Les constantes A et B se déduisent des conditions initiales :

- Condensateur avec charge initiale Q_{max} :

$$U_C(0) = \frac{Q_{max}}{C}$$

- Self non parcourue par un courant :

$$I(0) = -C\ \frac{dU_C}{dt}(0) = 0$$

La première donne :

$$A = \frac{Q_{max}}{C}$$

Or :

$$\frac{dU_C}{dt} = -\alpha\ \exp(-\alpha\, t)\,(A\ \cos(\omega_0\, t) + B\ \sin(\omega_0\, t)) \\ + \exp(-\alpha\, t)\,(-\,A\,\omega_0 \sin(\omega_0\, t) + B\,\omega_0 \cos(\omega_0\, t))$$

Exprimée en 0, cette dernière conduit à :

$$0 = -\alpha\, A + B\,\omega_0$$

soit :

$$B = \frac{\alpha}{\omega_0}\, A \ll A$$

B étant négligeable devant A, on en déduit :

$$\boxed{U_C = U_C(0)\exp(-\alpha\, t)\cos(\omega_0\, t)}$$

Soit pour la charge du condensateur :

$$Q = Q_{max} \exp(-\alpha\, t)\cos(\omega_0\, t)$$

On obtient une courbe oscillatoire amortie dont les caractéristiques sont :

- La pseudo période (intervalle de temps entre deux pics) :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\,\sqrt{L\,C}}$$

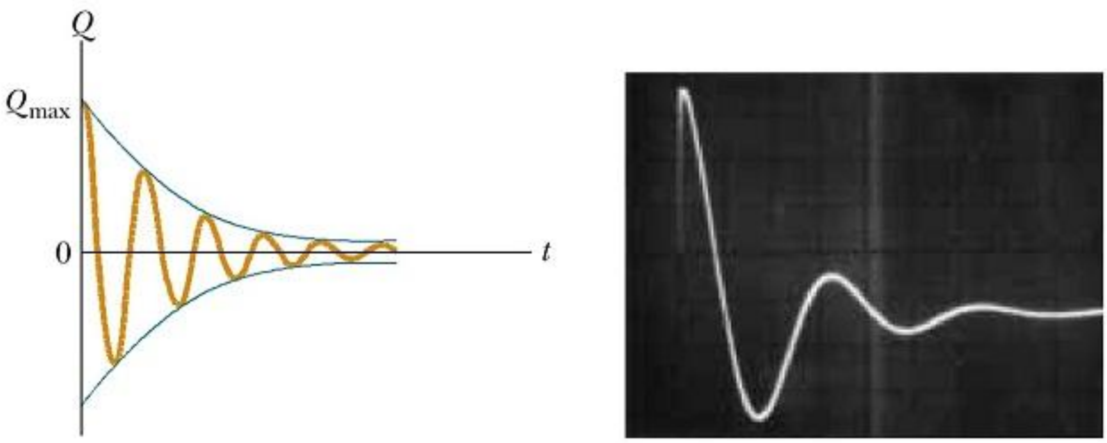
- La fréquence d'oscillations (le nombre de périodes par seconde) :

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{L\,C}}}$$

- Le décrément logarithmique (Taux devariation en valeur absolue du logarithme népérien de l'amplitude entre deux pics consécutifs)

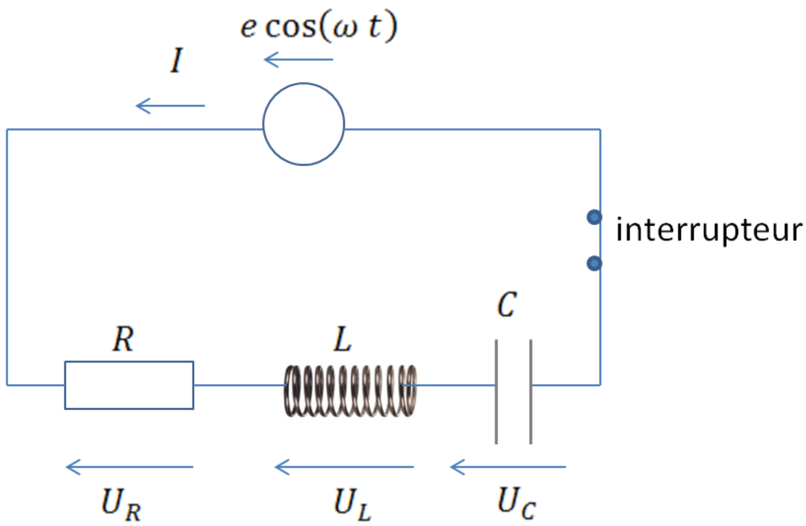
$$\boxed{\frac{Ln\, U_C(t_{pic}) - Ln\, U_C(t_{pic}+T_0)}{T_0} = \frac{1}{T_0} Ln\left(\frac{U_C(0)\exp(-\alpha\, t_{pic})}{U_C(0)\exp\left(-\alpha\,(t_{pic}+T_0)\right)}\right) = \alpha}$$

Voilà l'allure de la courbe donné par un oscilloscope :



(a) (b)

II Circuit R L C alimenté par une source de tension alternative :



Le circuit est fermé à l'instant $t = 0$, le condensateur portant une charge nulle et la self n'étant parcourue par aucun courant à cet instant.

La loi d'additivité des tensions s'écrit alors :

$$U_R + U_L + U_C = e\cos(\omega\, t)$$

Soit, compte, tenu des lois de chaque dipôle :

$$R\, C\, \frac{dU_C}{dt} + L\, \frac{dI}{dt} + U_C = e\cos(\omega\, t)$$

sachant :

$$I = C\, \frac{dU_C}{dt}$$

donc, en remplaçant et en normalisant :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\, \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{L\, C}\, U_C = \frac{e}{LC}\, \cos(\omega\, t)$$

Soit, avec les mêmes paramètres que dans le cas précédent :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\,\alpha\, \frac{dU_C}{dt} + {\omega_0}^2\, U_C = {\omega_0}^2 e\ \cos(\omega\, t)}}$$

La solution générale d'une telle équation est la somme d'une solution particulière de la forme :

$$U_C = A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)$$

Et de la solution générale de l'équation homogène associée qui est de la forme :

$$U_C = \exp(-\alpha\, t)\, (A'\ \cos(\omega_0\, t) + B'\ \sin(\omega_0\, t))$$

Si on ne s'intéresse qu'au régime permanent, cette dernière composante tend vers 0 et la tension aux bornes du condensateur correspond à la solution particulière.

Afin de simplifier la recherche de la solution particulière, on voit l'équation différentielle comme la partie réelle d'une équation différentielle portant sur des grandeurs complexes, à savoir :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2{U_C}^*}{dt^2} + 2\,\alpha\, \frac{d{U_C}^*}{dt} + {\omega_0}^2\, {U_C}^* = {\omega_0}^2 e\ exp(j\,\omega\, t)}}$$

Cette équation est qualifiée d'équation complexe associée. On cherche alors une solution particulière à cette équation de la forme :

$$U_C{}^* = \overline{U_C}\, exp(j\,\omega\, t)$$

où $\overline{U_C}$ est un nombre complexe appelée tension complexe aux bornes du condensateur.

On a alors :

$$\frac{dU_C{}^*}{dt} = j\,\omega\,\overline{U_C}\, exp(j\,\omega\, t) = \ j\,\omega\, U_C{}^*$$

$$\frac{d^2U_C{}^*}{dt^2} = (j\,\omega)^2\, U_C{}^* = -\omega^2\, U_C{}^*$$

On introduit également la tension complexe excitatrice :

$$e^* = \overline{e}\, exp(j\,\omega\, t) = e\, exp(j\,\omega\, t)$$

On en déduit :

$$-\omega^2\, U_C{}^* + 2\,\alpha\, j\,\omega\, U_C{}^* + \omega_0{}^2\, U_C{}^* = \omega_0{}^2 e^*$$

On note alors que le temps disparaît de l'équation en divisant par le facteur exponentiel. Ainsi :

$$-\omega^2\,\overline{U_C} + 2\,\alpha\, j\,\omega\,\overline{U_C} + \omega_0{}^2\,\overline{U_C} = \omega_0{}^2\overline{e}$$

Les tensions complexes sont donc reliées par une équation, dont on déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{U_C} = \frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2 - \omega^2 + 2\,\alpha\, j\,\omega}\,\overline{e}}}$$

Chaque grandeur G du circuit telle que U_R, U_L, I est, en régime permanent, une fonction de même forme que U_C c'est-à-dire en $A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)$.

Or en posant :

$$A - j\,B = \hat{G}\, exp(j\,\varphi_G)$$

On a :

$$G = A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t) = D\,(\cos(\omega\, t)\cos(\varphi) - \sin(\omega\, t)\sin(\varphi)) = \hat{G}\ \cos(\omega\, t + \varphi_G)$$

Pour chacune de ces grandeurs, on peut introduire une grandeur complexe G^* dont G est la partie réelle, c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{G^* = \hat{G}\, exp(j\,\varphi_G)\, exp(j\,\omega\, t) = \overline{G}\, exp(j\,\omega\, t)}}$$

La quantité $\overline{G} = \hat{G}\, exp(j\,\varphi_G)$ est appelée grandeur complexe associée à G. $\hat{G}$ est son module, il représente l'amplitude de G et φ_G un argument qualifié de phase.

Les relations sur les grandeurs réelles se traduisent en relations sur les grandeurs complexes. Ainsi :

$$U_R = R\ I$$

donne :

$$U_R{}^* = R\ I^*$$

puis, en éliminant le facteur exponentiel :

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\ \overline{\boldsymbol{I}}}$$

De même :

$$I = C\ \frac{dU_C}{dt}$$

donne :

$$I^* = C\ \frac{dU_C{}^*}{dt} = C\ j\ \omega\ U_C{}^*$$

Puis, en éliminant le facteur exponentiel :

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{\omega}\ \overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{C}}}$$

enfin :

$$U_L = L\ \frac{dI}{dt}$$

donne :

$$U_L{}^* = L\ \frac{dI^*}{dt} = L\ j\ \omega\ I^*$$

puis, en éliminant le facteur exponentiel :

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{L}\ \boldsymbol{\omega}\ \overline{\boldsymbol{I}}}$$

Nous voyons donc apparaitre des relations entre grandeur complexe de tension et d'intensité pour chaque dipôle, qui s'apparentent à celle définie par la loi d'Ohm et qui se mettent sous forme :

$$\overline{U} = \overline{Z}\ \overline{I}$$

Avec :

pour le résistor :

$$\overline{Z} = R$$

pour le condensateur :

$$\overline{Z} = \frac{1}{j\,C\,\omega}$$

Pour la self :

$$\overline{Z} = j\,L\,\omega$$

$\overline{Z}$ **est appelée impédance complexe du dipôle et se met sous forme exponentielle :**

$$\overline{Z} = Z\,exp(j\,\varphi_Z)$$

On en déduit :

$$Z = \frac{\widehat{U}}{\widehat{I}}$$

$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$$

Le module de $\overline{Z}$ est donc le rapport de l'amplitude de la tension à l'amplitude de l'intensité et son argument, la différence de des phase entre tension et intensité (on dit déphasage)

On constate :

pour un résistor, tension et intensité sont en phase :

$$\varphi_Z = 0$$

pour un condensateur, la tension est décalée d'un quart de période sur la droite par rapport à l'intensité. La tension est dite en quadrature retard sur l'intensité

$$\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$$

Pour une self, la tension est décalée d'un quart de période sur la gauche par rapport à l'intensité. La tension est dite en quadrature avance sur l'intensité :

$$\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$$

Nous constatons également que la loi d'additivité des tensions et la loi des nœuds se transpose aux grandeurs complexes. Un circuit électrique formé de dipôles dont on étudie seulement le régime permanent sous des tensions excitatrices de même fréquence, s'étudie donc comme un circuit fait de résistors avec des grandeurs complexes et en remplaçant les résistances par les impédances complexes.

Supposons que nous nous intéressions à la grandeur intensité dans le circuit RLC étudié, alors nous avons :

$$\overline{I} = j\ C\ \omega\ \overline{U}_C = \frac{j\ C\ \omega\ {\omega_0}^2}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\ \alpha\ j\ \omega}\ \overline{e} = \frac{1}{\overline{Z}}\ \overline{e}$$

où $\overline{Z}$ désigne l'impédance équivalente du circuit RLC dont on peut vérifier qu'elle est la somme des impédance des trois dipôle :

$$\overline{Z} = \frac{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\ \alpha\ j\ \omega}{j\ C\ \omega\ {\omega_0}^2} = R + j\ L\ \omega + \frac{1}{j\ C\ \omega} = R + j\ \left(L\ \omega - \frac{1}{C\ \omega}\right)$$

Intéressons nous alors à l'allure de l'amplitude de l'intensité en fonction de la pulsation ω (souvent confondue en appellation avec la fréquence).

La relation liant amplitude de l'intensité et amplitude de la tension excitatrice est :

$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{e}}{Z(\omega)}$$

avec :

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\ \omega - \frac{1}{C\ \omega}\right)^2}$$

donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\hat{I}(\omega) = \hat{e}\ \left(R^2 + \left(L\ \omega - \frac{1}{C\ \omega}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}}$$

$$\frac{d\hat{I}(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2}\hat{e}\ \left(R^2 + \left(L\ \omega - \frac{1}{C\ \omega}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \times 2\ \left(L\ \omega - \frac{1}{C\ \omega}\right) \times \left(L + \frac{1}{C\ \omega^2}\right)$$

La dérivée est donc du signe de :

$$-\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right) = \frac{1 - L\,C\,\omega^2}{C\,\omega} = \frac{L\,C\,{\omega_0}^2 - L\,C\,\omega^2}{C\,\omega}$$

elle-même du signe de :

$${\omega_0}^2 - \omega^2$$

donc $\hat{I}(\omega)$ est strictement croissante sur $[0; \omega_0]$ et strictement décroissante sur $[\omega_0; +\infty]$. Elle présente donc un maximum en ω_0 qui vaut :

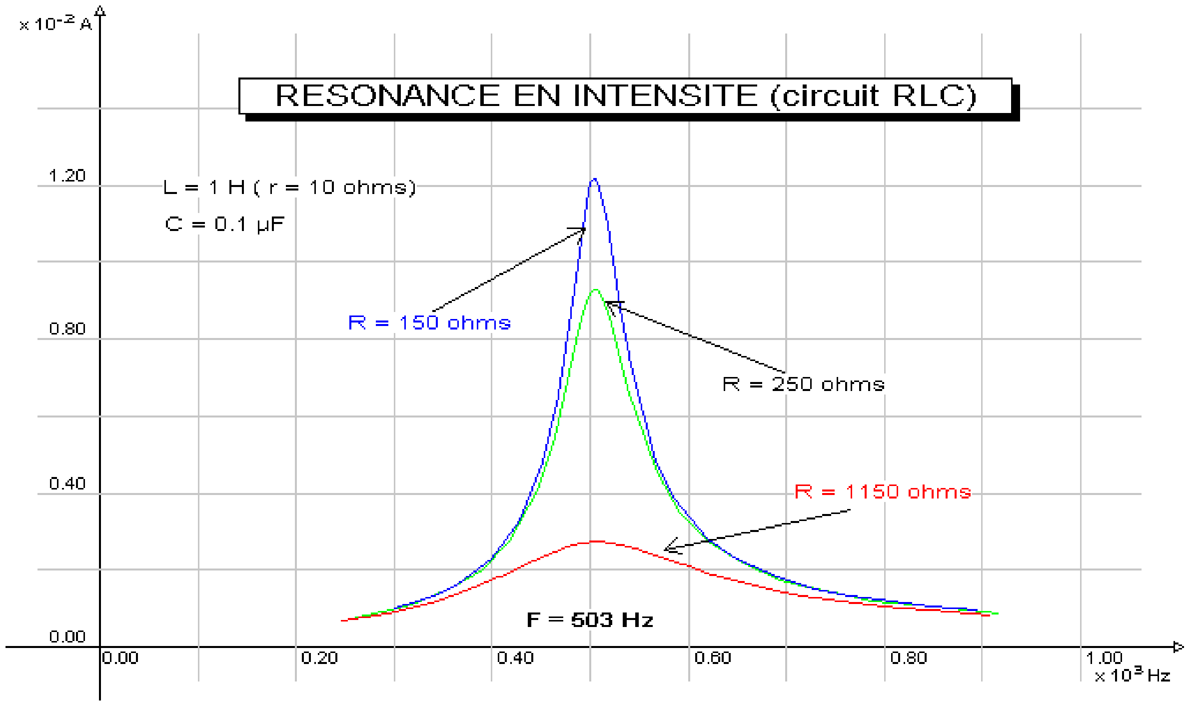
$$\hat{I}(\omega_0) = \frac{\hat{e}}{R}$$

En annexe, nous avons démontré que la courbe est « localement symétrique » par rapport à l'axe vertical $\omega = \omega_0$

L'étude de la bande passante faite plus loin va montrer que le pic en ω_0 est d'autant plus aigu que R est petit. Ce phénomène est qualifié de résonance. Ceci va être très utile pour le filtrage de tensions excitatrices qui seraient une superposition de tensions sinusoïdales pures, ce qui est la situation rencontrée avec une antenne radio qui joue le rôle d'excitateur d'un circuit RLC appelé tuner dont on peut faire varier ω_0 en faisant varier la capacité du condensateur par exemple.

Voici un exemple de courbe pour trois valeurs de la résistance et des valeurs de capacité et d'inductance fixée. La courbe présente l'amplitude de l'intensité en fonction de la fréquence $f = \omega/(2\,\pi)$. La fréquence de résonance est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{1 \times\ 0{,}1 \times 10^{-6}}} \approx 503\ Hz$$



Afin d'apprécier la sélectivité d'un circuit RLC, on s'intéresse à une bande de fréquence $[\omega_1;\ \omega_2]$ centrée sur ω_0 et appelée **bande passante**, telle que pour toute fréquence de cette bande on ait :

$$\hat{I}(\omega) \geq \frac{\hat{I}(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

Les fréquences frontières de cette bande se déterminent en résolvant :

$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{I}(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

soit :

$$\frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}} = \frac{\hat{e}}{R\,\sqrt{2}}$$

$$R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2 = 2\,R^2$$

$$\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2 = R^2$$

$$L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} = R \quad ou \;\; L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} = -R$$

$$L\,C\,\omega^2 - R\,C\,\omega - 1 = 0 \quad ou \;\; L\,C\,\omega^2 + R\,C\,\omega - 1 = 0$$

Les deux équations ont même discriminant :

$$\Delta = R^2\,C^2 + \;4\,L\,C$$

En se plaçant toujours dans le cas où

$$\frac{R}{2\,L} \ll \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

on a :

$$R^2\,C^2 \ll 4\,L\,C$$

ainsi :

$$\Delta \approx 4\,L\,C$$

On ne retient alors que les solutions positives et on a :

$$\omega_1 = \frac{-R\,C + 2\sqrt{L\,C}}{2\,L\,C} = \omega_0 - \;\alpha$$

$$\omega_2 = \frac{R\,C + 2\sqrt{L\,C}}{2\,L\,C} = \omega_0 + \;\alpha$$

La largeur de la bande passante est alors :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\,\alpha = \frac{R}{L}}}$$

Exprimée en fréquence (Hz), elle vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2}{2\,\pi} - \frac{\omega_1}{2\,\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\,\pi} = \frac{R}{2\,\pi\,L}}}$$

On définit alors le **facteur de qualité** par :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\,\alpha} = \frac{L}{R\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Plus ce facteur est élevé, plus la bande passante est étroite et plus le circuit est sélectif.

On trouve aussi les formules suivantes :

$$\boxed{Q = \frac{L\,\omega_0}{R} = \frac{1}{R\,C\,\omega_0}}$$

qui le font apparaitre comme quotient des impédances de la self et de la résistance ou bien du condensateur et de la résistance.

Annexe : Symétrie locale de la courbe $\hat{I}(\omega)$ autour de la pulsation de résonance

Faisons un développement limité à l'ordre 2 de $\hat{I}(\omega)$ autour de ω_0 en posant $\omega = \omega_0 + h$

$$\hat{I}(\omega) = \hat{e}\left(R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \hat{e}\left(R^2 + \left(L\,(\omega_0 + h) - \frac{1}{C\,(\omega_0 + h)}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{e}\left(R^2 + \left(L\,\omega_0 + L\,h - \frac{1}{C\,\omega_0 + C\,h}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{e}\left(R^2 + \left(L\,\omega_0 + L\,h - \frac{1}{C\,\omega_0}\left(1 + \frac{h}{\omega_0}\right)^{-1}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{e}\left(R^2 + \left(L\,\omega_0 + L\,h - \frac{1}{C\,\omega_0}\left(1 - \frac{h}{\omega_0} + o(h)\right)\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{e}\left(R^2 + \left(L\,\omega_0 - \frac{1}{C\,\omega_0} + L\,h + \frac{h}{C\,{\omega_0}^2} + o(h)\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Notons que :

$$L\,\omega_0 - \frac{1}{C\,\omega_0} = 0$$

$$\frac{h}{C\,{\omega_0}^2} = L\,h$$

donc :

$$\hat{I}(\omega) = \hat{e}\,(R^2 + (2L\,h + o(h))^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{e}\,(R^2 + 4\,L^2\,h^2 + o(h^2))^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\hat{e}}{R}\left(1 + \frac{4\,L^2}{R^2}\,h^2 + o(h^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\hat{e}}{R}\left(1 - \frac{2\,L^2}{R^2}\,h^2 + o(h^2)\right)$$

L'approximation tangente d'ordre 2 est donc la fonction du second degré :

$$g(\omega) = \frac{\hat{e}}{R}\left(1 - \frac{2\,L^2}{R^2}\,(\omega - \omega_0)^2\right)$$

Dont la courbe est une parabole de sommet identique au sommet de la courbe de $\hat{I}(\omega)$:

$$\Omega\left(\omega_0, \frac{\hat{e}}{R}\right)$$

la courbe de $\hat{I}(\omega)$ présente donc localement l'axe de symétrie de cette parabole soit :

$$\omega = \omega_0$$