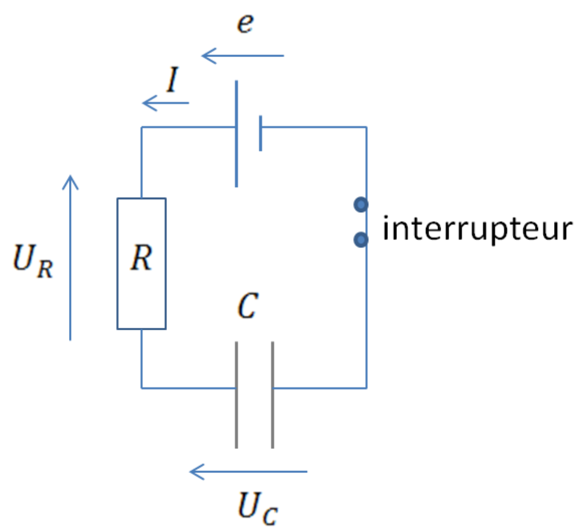
Charge et décharge de circuits R C et R L

I <u>Circuit R C</u> :

Un circuit R C est composé d'un résistor de résistance R mis en série avec un condensateur. Nous allons étudier deux types de circuits. L'un pour lequel le circuit est alimenté par un générateur de courant continu de fém e et l'autre pour lequel le système est bouclé sur lui-même.

1) <u>Circuit alimenté par un générateur</u> :

En négligeant la résistance interne du générateur devant R, nous avons le schéma suivant :



Le circuit est fermé à l'instant $t = 0$, le condensateur n'étant pas chargé à cet instant.

La loi d'additivité des tensions s'écrit alors :

$$U_R + U_C = e$$

Les lois tension-intensité des différents dipôles sont par ailleurs :

$$U_R = R\, I$$

$$I = C\, \frac{dU_C}{dt}$$

En reportant dans la première équation, il vient :

$$R\,C\,\frac{dU_C}{dt} + U_C = e$$

ce qui est une équation différentielle du premier ordre en la fonction U_C. La résolution est classique, on cherche une solution particulière constante, qui correspond à la tension d'équilibre, lorsque le condensateur est totalement chargé :

$$U_C = e$$

Puis on y ajoute la solution générale de l'équation homogène associée :

$$R\,C\,\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

soit encore :

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{RC}\,U_C$$

qui est :

$$U_C = A\,exp\left(-\frac{1}{RC}\,t\right)$$

On définit alors la constante de temps :

$$\tau = RC$$

Et on détermine A en appliquant la condition initiale à $t = 0$, le condensateur n'étant pas chargé et donc $U_C(0) = 0$:

$$A\,exp\left(-\frac{1}{RC} \times\ 0\right) + e = 0$$

soit :

$$A = -e$$

On en déduit la fonction U_C :

$$U_C = e\,\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

et la charge du condensateur :

$$q = C\,U_C = C\,e\,\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

La charge du condensateur est donc une fonction croissante qui tend vers une limite :

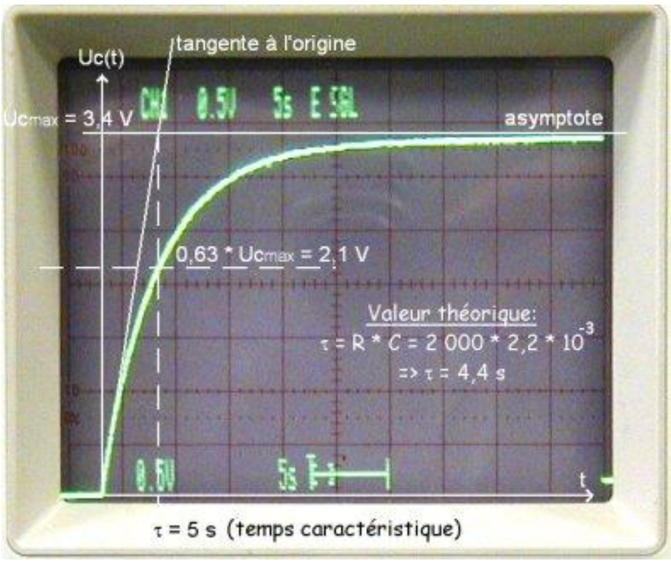
$$q_{lim} = C\,e$$

Au bout du temps τ la proportion de la charge limite atteinte est :

$$\frac{q(\tau)}{q_{lim}} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$$

τ est donc un temps caractéristique au bout duquel 63 % environ de la charge est achevée.

L'intérêt de τ est qu'il peut se mesurer expérimentalement en visualisant la courbe U_C à l'aide d'un oscilloscope.



Deux manières peuvent être employées :

La première consiste à noter le temps au bout duquel 63% de cette valeur est atteinte.

La seconde consiste à tracer la tangente à l'origine et à déterminer son intersection avec la droite horizontale $y = e$. τ est alors l'abscisse de ce point d'intersection. En effet, l'équation de la tangente en 0 est :

$$y = f'(0)\, t + f(0)$$

avec :

$$f(t) = e\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$f'(t) = e\left(\frac{1}{\tau} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Donc :

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{e}{\tau}$$

D’où :

$$y = \frac{e}{\tau}\ t$$

Le point d’intersection avec $y = e$ a donc pour abscisse τ

<u>Point de vue énergétique</u> :

La puissance fournie par le générateur à la résistance et au condensateur est :

$$P_{gén} = e\ I$$

L’énergie fournie par le générateur pendant la charge est donc :

$$W_{gén} = \int_0^{+\infty} e\ I\ dt = \ e \int_0^{+\infty} dq = e\ q_{lim} = C\ \ e^2$$

La puissance dissipée dans le résistor par effet Joule est :

$$P_J = R\ I^2$$

L’énergie dissipée par effet Joule pendant la charge est donc :

$$W_J = \int_0^{+\infty} R\ I^2\ dt$$

Or :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q_{lim}}{\tau}\ exp\left(-\ \frac{t}{\tau}\right)$$

donc :

$$W_J = R\ \frac{{q_{lim}}^2}{\tau} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau}\ exp\left(-\ \frac{2\ t}{\tau}\right)\ dt = R\ \frac{{q_{lim}}^2}{\tau}\ \left[-\frac{1}{2} exp\left(-\ \frac{2\ t}{\tau}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{R\ C^2\ e^2}{2\ R\ C} = \frac{1}{2}\ C\ e^2$$

L’énergie emmagasinée par le condensateur en fin de charge est :

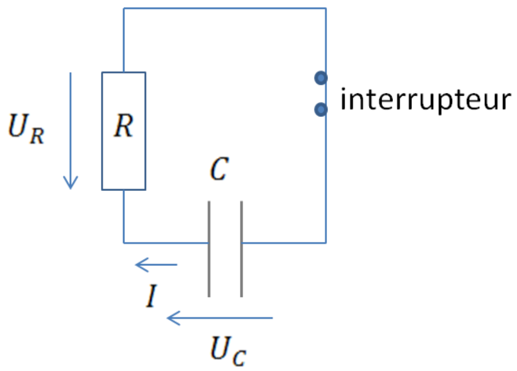
$$W_C = \frac{1}{2}\ C\ e^2$$

On vérifie ainsi bien la conservation de l’énergie :

$$W_{gén} = W_J + W_C$$

A noter que seule la moitié de l'énergie fournie par le générateur se retrouve emmagasinée dans le condensateur et ce, quelque soit la valeur de la résistance.

2) <u>Circuit bouclé sur lui-même</u> :



Cette fois-ci, le condensateur étant initialement chargé de charge q_{max} on ferme l'interrupteur et on laisse le condensateur se décharger à travers le circuit.

La loi des tensions devient :

$$U_C = U_R$$

La loi du condensateur s'écrit (attention au signe !) :

$$-I = C\frac{dU_C}{dt}$$

La loi d'Ohm pour le résistor s'écrit (attention au changement de convention pour U_R par rapport au schéma précédent) :

$$U_R = R\,I$$

Ainsi :

$$U_C = -\,R\,C\frac{dU_C}{dt}$$

soit :

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{RC}\,U_C$$

Il s’agit de l’équation homogène de la situation précédente. La solution est :

$$U_C = A\, exp\left(-\frac{1}{RC}\; t\right)$$

et pour la charge :

$$q = C\, U_C = C\, A\, exp\left(-\frac{1}{RC}\; t\right)$$

Et on détermine A en appliquant la condition initiale , le condensateur portant la charge q_{max} à $t = 0$:

$$C\, A\, exp\left(-\, \frac{1}{RC} \times\; 0\right) = q_{max}$$

soit :

$$C\, A = q_{max}$$

On en déduit la fonction q :

$$q = q_{max}\; exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right)$$

La charge du condensateur est donc une fonction décroissante qui tend vers 0 :

Au bout du temps τ la proportion de la charge évacuée est :

$$\frac{q_{max} - q(\tau)}{q_{max}} = 1 - exp(-\,1) \approx 0{,}63$$

τ est donc un temps caractéristique au bout duquel 63 % environ de la décharge est achevée.

<u>Point de vue énergétique</u> :

L’énergie dissipée dans la résistance est égale à l’énergie initiale du condensateur à savoir :

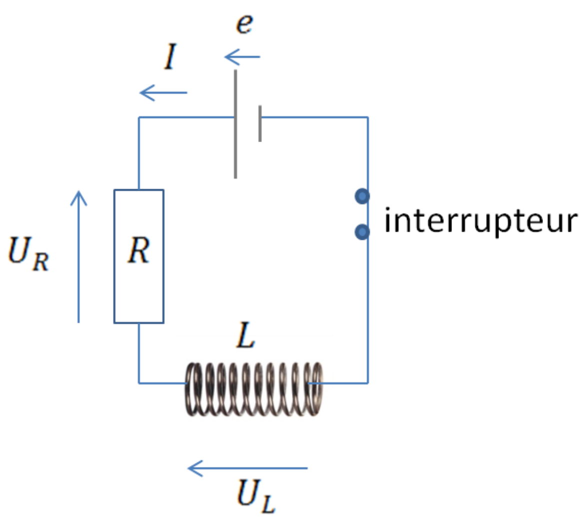
$$W = \frac{1}{2}\, \frac{{q_{max}}^2}{C}$$

II Circuit R L :

Un circuit R L est composé d'un résistor de résistance R mis en série avec une self. Nous allons étudier deux types de circuits. L'un pour lequel le circuit est alimenté par un générateur de courant continu de fém e et l'autre pour lequel le système est bouclé sur lui-même.

1) Circuit alimenté par un générateur :

En négligeant la résistance interne du générateur devant R, nous avons le schéma suivant :



Le circuit est fermé à l'instant $t = 0$, la self n'étant donc parcourue par aucun courant à cet instant.

La loi d'additivité des tensions s'écrit alors :

$$U_R + U_L = e$$

Les lois tension-intensité des différents dipôles sont par ailleurs :

$$U_R = R\,I$$

$$U_L = L\,\frac{dI}{dt}$$

En reportant dans la première équation, il vient :

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = e$$

ce qui est une équation différentielle du premier ordre en la fonction I. La résolution est classique, on cherche une solution particulière constante, qui correspond à l'intensité d'équilibre, lorsque la self est totalement « chargée » :

$$I = \frac{e}{R}$$

Puis on y ajoute la solution générale de l'équation homogène associée :

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = 0$$

soit encore :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\,I$$

qui est :

$$I = A\,exp\left(-\frac{R}{L}\,t\right)$$

On définit alors la constante de temps :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Et on détermine A en appliquant la condition initiale à $t = 0$, à savoir $I(0) = 0$:

$$A\,exp\left(-\frac{R}{L} \times 0\right) + \frac{e}{R} = 0$$

soit :

$$A = -\frac{e}{R}$$

On en déduit la fonction I :

$$I = \frac{e}{R}\left(1 - exp\left(-\,\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

L'intensité traversant la self est donc une fonction croissante qui tend vers une limite :

$$I_{lim} = \frac{e}{R}$$

Au bout du temps τ la proportion de l'intensité limite atteinte est :

$$\frac{I(\tau)}{I_{lim}} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$$

τ est donc un temps caractéristique au bout duquel 63 % environ de l'intensité limite est atteinte et peut se mesurer expérimentalement en visualisant à l'aide d'un oscilloscope la tension U_R aux bornes de la résistance, car U_R a un profil analogique à I :

$$U_R = R\, I = e\, \left(1 - exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Point de vue énergétique :

La puissance fournie par le générateur à la résistance et à la self est :

$$P_{gén} = e\, I$$

L'énergie fournie par le générateur pendant une durée Δt de la « charge » de la self est donc :

$$W_{gén} = \int_0^{\Delta t} e\, I\, dt = \ e \int_0^{\Delta t} \frac{e}{R} \left(1 - exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right)\right) = \frac{e^2}{R} \left[t + \tau\, exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{\Delta t}$$

$$= \frac{e^2}{R}\, \Delta t + \frac{L\, e^2}{R^2} \left(exp\left(-\, \frac{\Delta t}{\tau}\right) - 1\right)$$

Soit, en supposant Δt grand devant τ

$$W_{gén} = \frac{e^2}{R}\, \Delta t - \frac{L\, e^2}{R^2}$$

L'énergie dissipée par effet Joule pendant la durée Δt est :

$$W_J = \int_0^{\Delta t} R\, I^2\, dt = \int_0^{\Delta t} R\, \frac{e^2}{R^2} \left(1 - 2\, exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right) + exp\left(-\, \frac{2\, t}{\tau}\right)\right) dt$$

$$= \frac{e^2}{R} \left[t + 2\, \tau\, exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right) - \frac{\tau}{2}\, exp\left(-\, \frac{2\, t}{\tau}\right)\right]_0^{\Delta t}$$

soit , toujours avec Δt grand devant τ :

$$W_J = \frac{e^2}{R}\, \Delta t - \frac{e^2}{R}\left(2\, \tau - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{e^2}{R}\, \Delta t - \frac{3}{2}\, \frac{L\, e^2}{R^2}$$

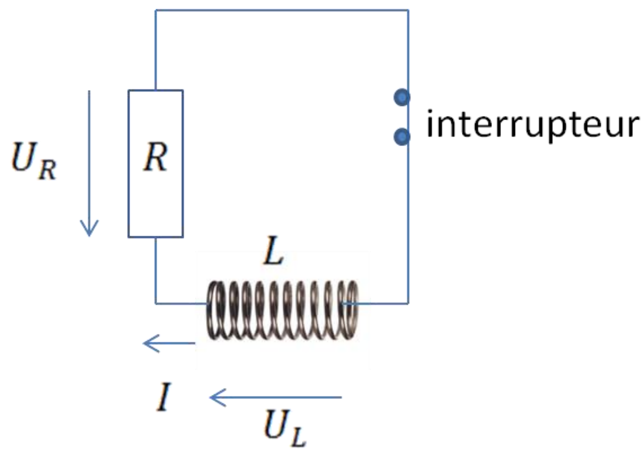
L'énergie emmagasinée par la self en fin de charge est :

$$W_L = \frac{1}{2}\, L\, {I_{lim}}^2 = \frac{1}{2}\, \frac{L\, e^2}{R^2}$$

On vérifie bien la conservation de l'énergie :

$$W_{gén} = W_J + W_L$$

2) <u>Circuit bouclé sur lui-même</u> :



Cette fois-ci, la self étant parcourue par un courant I_{max}, on la laisse se décharger dans le circuit.

La loi des tensions devient :

$$U_L = U_R$$

La loi de la self s'écrit (attention au signe !) :

$$U_L = L\frac{d(-I)}{dt}$$

La loi d'Ohm pour le résistor s'écrit (attention au changement de convention pour U_R par rapport au schéma précédent) :

$$U_R = R\,I$$

Ainsi :

$$L\frac{d(-I)}{dt} = R\,I$$

soit :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\,I$$

Il s'agit de l'équation homogène de la situation précédente. La solution est :

$$I = A\, exp\left(-\frac{R}{L}\, t\right)$$

et on détermine A en appliquant la condition initiale : à $t = 0$, $I(0) = I_{max}$

$$A\, exp\left(-\frac{R}{L} \times 0\right) = I_{max}$$

soit :

$$A = I_{max}$$

On en déduit la fonction I :

$$I = I_{max}\, exp\left(-\, \frac{t}{\tau}\right)$$

L'intensité dans la self est donc une fonction décroissante qui tend vers 0 :

Au bout du temps τ la baisse relative de l'intensité est :

$$\frac{I_{max} - I(\tau)}{I_{max}} = 1 - exp(-\,1) \approx 0{,}63$$

τ est donc un temps caractéristique au bout duquel 63 % environ de la « décharge » est achevée.

<u>Point de vue énergétique</u> :

L'énergie dissipée dans la résistance est égale à l'énergie initiale de la self à savoir :

$$W = \frac{1}{2}\, L\, {I_{max}}^2$$